Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Donades les rectes

$$r:\left\{\frac{3x-3}{6}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-3}\right. \quad \text{i} \quad s:\left\{\begin{array}{l} x+z=0 \\ y=0 \end{array}\right.$$

a) Trobeu un punt i un vector director de cada recta
b) Quina és la posició relativa d'aquestes rectes?
c) Quina angle formen les rectes ?

(1+1+ 0,5=2,5 punts)

2) Donat el punts P(–3,1,–7) i la recta $r:\left\{x+1=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}\right.$

a) Trobeu la distància del punt P a la recta r
b) Projecteu perpendicularment el punt P sobre la recta r (és a dir trobeu la intersecció de la recta r i el pla perpendicular a r que passa per P)
c) Trobeu el punt simètric del punt P respecte la recta r

(0,5+ 1+0,5=2 punts)

3) Trobeu l'equació implícita dels plans paral·lels al pla p : x + y + z = 8 que determinen amb els eixos de coordenades ($\overleftrightarrow{OX}$,$\overleftrightarrow{OY}$ i $\overleftrightarrow{OZ}$) un triangle de $8\sqrt{3}$ unitats de superfície.

(1 punt)

4) Donats els plans

a : 3x + 2y – z + 4 = 0
b : 6x + 4y – 2z – 4 = 0
g : 2x + 5y– 7z + 49 = 0

i la recta $r:\left\{\frac{x-1}{0}=4y=\frac{z+1}{m}\right.$

a) Trobeu un punt, un vector normal i un parell de vectors directors del pla a
b) Quina és la posició relativa entre a i b ? Calcula la distància entre a i b .
c) Quina és la posició relativa entre a i g ? Calcula la distància entre a i g .
d) Calcula l'angle que determinen a i g
e) Trobeu el valor de "m" per a que la recta sigui paral·lela al pla a
f) Trobeu una recta que passi pel punt A(1,0,0) i sigui perpendicular al plans a i g .
g) Per m=2 trobeu una pla que contingui a la recta r i que sigui perpendicular al pla a

(0,4 + 0,75+0,6+0,5+0,5+1+0,75 = 4,5 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Donades les rectes

$$r : \left\{ \frac{3x-3}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-3} \right. \quad \text{i} \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x+z=0 \\ y=0 \end{array} \right.$$

a) Trobeu un punt i un vector director de cada recta
b) Quina és la posició relativa d'aquestes rectes?
c) Quina angle formen les rectes ?

(1+1+ 0,5=2,5 punts)

1

a) $r : \frac{3x-3}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-3}$ $\quad R(1,0,-1)$, $\vec{v_r} = (2,3,-3)$

$\frac{x-1}{2}$ ''

$s : \left.\begin{array}{l} x+z=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ EQ. PARAMÈTRIQUES $\left.\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array}\right\} \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow S(0,0,0) \in s$, $\vec{v_s} = (-1,0,1)$

b) • $\vec{v_r}$ i $\vec{v_s}$ són L.I ja que $\left(\frac{2}{-1} = \frac{3}{0} = \frac{-3}{1}\right)$ NO $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ r i s es tallen en un punt o es creuen.

• $\det(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \vec{SR}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ r i s es tallen en UN PUNT
r i s són SECANTS

c) $\alpha = \measuredangle(r,s) \Rightarrow \cos\alpha = \frac{|\vec{v_r} \cdot \vec{v_s}|}{|\vec{v_r}|\,|\vec{v_s}|} = \frac{|-2-3|}{\sqrt{4+9+9}\,\sqrt{1+1}}$

$\alpha = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{22}\,\sqrt{2}}\right) = \arccos(0{,}753778361) = \underline{\underline{41{,}08^\circ}}$

2) Donat el punts P(–3,1,–7) i la recta $r : \left\{ x+1 = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2} \right.$

a) Trobeu la distància del punt P a la recta r

b) Projecteu perpendicularment el punt P sobre la recta r (és a dir trobeu la intersecció de la recta r i el pla perpendicular a r que passa per P)

c) Trobeu el punt simètric del punt P respecte la recta r

(0,5+ 1+0,5=2 punts)

2

$P(-3,1,-7) \qquad r \left\{ \begin{array}{l} R(-1,3,-1) \in r \\ \vec{v_r} = (1,2,2) \end{array} \right.$

a) $d(P,r) = \dfrac{|\vec{RP} \times \vec{v_r}|}{|\vec{v_r}|} = \dfrac{\sqrt{64+4+4}}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{\sqrt{72}}{3}$ UNITATS

$\vec{RP} \times \vec{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (8, -2, -2)$

b) $\left. \begin{array}{l} \pi \perp r \Rightarrow n_\pi = \vec{v_r} = (1,2,2) \\ P(-3,1,-7) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : x + 2y + 2z + D = 0 \\ P(-3,1,-7) \in \pi \end{array} \right\}$

$\Rightarrow -3 + 2 - 14 + D = 0 \Rightarrow D = 15$

$\Rightarrow \boxed{\pi : x + 2y + 2z + 15 = 0}$

tallo ara π amb la recta $r \left\{ \begin{array}{l} R(-1,3,-1) \in r \\ \vec{v_r}(1,2,2) \end{array} \right.$

$\pi \cap r = R_\lambda$ un punt concret de r

Així doncs he de trobar el λ que verifica que $R_\lambda \in \pi$

$R_\lambda(-1+\lambda, 3+2\lambda, -1+2\lambda)$

$\Rightarrow R_\lambda \in \pi \Rightarrow -1 + \lambda + 6 + 4\lambda - 2 + 4\lambda + 15 = 0$

$9\lambda = -18$

$\lambda = \frac{-18}{9} \Rightarrow \lambda = -2$

$\Rightarrow \pi \cap r = R_{\lambda=-2}(-1-2, 3-4, -1-4) = (-3,-1,-5)$

c) $P\,(-3,1,-7)$ —— $R_{\lambda=-2}\,(-3,-1,-5)$ —→ $P'(x,y,z)$ $\Rightarrow$ Ara Imposo que $R_{\lambda=-2}$ és el punt mig PP'

$\left. \begin{array}{l} \frac{-3+x}{2} = -3 \\ \frac{1+y}{2} = -1 \\ \frac{-7+z}{2} = -5 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 3 - 6 = -3 \\ y = -1 - 2 = -3 \\ z = 7 - 10 = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow P'(-3,-3,-3)$

3) Trobeu l'equació implícita dels plans paral·lels al pla $p: x + y + z = 8$ que determinen amb els eixos de coordenades ($\overleftrightarrow{OX}$, $\overleftrightarrow{OY}$ i $\overleftrightarrow{OZ}$) un triangle de $8\sqrt{3}$ unitats de superfície.

(1 punt)

3

Els plans paral·lels tenen per equació:

$x + y + z = d$. per cert $d \in \mathbb{R}$

Tallant amb els eixos tenim

$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ x+y+z=d \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0,d)$ A

$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ z=0 \\ x+y+z=d \end{array}\right\} \Rightarrow (0,d,0)$ B

$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ z=0 \\ x+y+z=d \end{array}\right\} \Rightarrow (d,0,0)$ C

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & d & -d \\ d & 0 & -d \end{vmatrix} = (-d^2, d^2, -d^2)$$

$$\text{Àrea } (\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{d^4 + d^4 + d^4} =$$

$\text{Àrea } (\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \sqrt{3}\, d^2$

Si Àrea $= 8\sqrt{3}$

$\frac{1}{2} \cancel{\sqrt{3}}\, d^2 = 8 \cancel{\sqrt{3}}$

$d^2 = 16$

$d = \pm\sqrt{16}$

$\boxed{d = \pm 4}$

$\Rightarrow$ DUES SOLUCIONS

1) $x + y + z = 4$

2) $x + y + z = -4$

4) Donats els plans

$$a : 3x + 2y - z + 4 = 0$$
$$b : 6x + 4y - 2z - 4 = 0$$
$$g : 2x + 5y - 7z + 49 = 0$$

i la recta $r : \left\{ \dfrac{x-1}{0} = 4y = \dfrac{z+1}{m} \right.$

a) Trobeu un punt, un vector normal i un parell de vectors directors del pla a

b) Quina és la posició relativa entre a i b ? Calcula la distància entre a i b .

c) Quina és la posició relativa entre a i g ? Calcula la distància entre a i g .

d) Calcula l'angle que determinen a i g

e) Trobeu el valor de "m" per a que la recta sigui paral·lela al pla a

f) Trobeu una recta que passi pel punt A(1,0,0) i sigui perpendicular al plans a i g .

g) Per m=2 trobeu una pla que contingui a la recta r i que sigui perpendicular al pla a

(0,4 + 0,75+0,6+0,5+0,5+1+0,75 = 4,5 punts)

4

a) $\alpha : 3x + 2y - z + 4 = 0 \Rightarrow$

$z = 4 + 3x + 2y \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 4 + 3\lambda + 2\mu \end{array} \right\} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ PT. $A(0,0,4)$

$\vec{n}_{\pi} = (3,2,-1)$

Parell de vectors directors que són l.I $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = (1,0,3) \\ \vec{v} = (0,1,2) \end{array} \right.$

b) α i β

$\left. \dfrac{3}{6} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{-1}{-2} \neq \dfrac{4}{-4} \right\} \Rightarrow \alpha // \beta$

Com $\alpha // \beta \Rightarrow d(\alpha,\beta) = d(A;\beta) = \dfrac{|-8+4|}{\sqrt{36+16+4}} =$

$(0,0,4) A \in \alpha$

$= \dfrac{12}{\sqrt{56}} = \ldots = \dfrac{12\sqrt{56}}{56} = \dfrac{3\sqrt{56}}{14} = \dfrac{3 \cdot 2\sqrt{14}}{14} = \dfrac{3\sqrt{14}}{7}$ unitat.

c) α i γ

$\left(\dfrac{3}{2} = \dfrac{2}{5} = \dfrac{-1}{-7} \right)$ NO $\Rightarrow \alpha$ i γ secants en UNA RECTA

$\Rightarrow d(\alpha,\gamma) = 0$

. . . el dels seus

$\Rightarrow d(\alpha, \gamma) = 0$

d) angle que determinen α i γ el dels seus vectors normals.

$$\cos(\text{Angle}) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\gamma|}{|\vec{n}_\alpha|\,|\vec{n}_\gamma|} = \frac{|6+10+7|}{\sqrt{9+4+1}\,\sqrt{4+25+49}}$$

$\vec{n}_\alpha = (3,2,-1)$

$\vec{n}_\gamma = (2,5,-7)$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{23}{\sqrt{14}\,\sqrt{78}}\right) = \arccos(0{,}6960) \simeq 45{,}89^\circ$$

e) $\vec{V}_r = (0, \frac{1}{4}, m)$ o $\overrightarrow{(0, 1, 4m)}$

$\vec{n}_\alpha = (3,2,-1)$ Agafem aquest.

$r \parallel \pi \Rightarrow \vec{V}_r \perp \vec{n}_\alpha \Rightarrow \vec{V}_r \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \Rightarrow$

$2 - 4m = 0$

$2 = 4m$

$\boxed{\frac{1}{2} = m}$

f) la recta Buscada seria $t = r(A, \vec{V}_t)$

Però $\vec{V}_t$ i $\vec{n}_\alpha$ L.D

i $\vec{V}_t$ i n_γ L.D.

Pero Com $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\gamma$ Son L.I

$\Rightarrow$ IMPOSSIBLE

$\Rightarrow$ Aquesta recta no existeix

9) $\vec{v_r} = (0, \frac{1}{4}, 2)$ o $\underline{\underline{\overrightarrow{(0,1,8)}}}$

agafem aquest

$r = r\left(R(1,0,-1) \,;\, \vec{v_r} = (0,1,8)\right)$

El pla buscat π ha de complir

$r \subset \pi \Rightarrow$ $R \in \pi$

$\vec{v_r}$ és un vector del pla

$\pi \perp \alpha \Rightarrow \vec{n_\alpha}$ és ———

$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r} = (0,1,8) \\ \vec{n_\alpha} = (3,2,-1) \end{array}\right\}$

Són L.I

Ja que $\frac{0}{3} \neq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ El pla és $\pi = \pi(R ; \vec{v_r} ; \vec{n_\alpha})$ i per tant

d'equació

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 3 \\ y & 1 & 2 \\ z+1 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x+1+24y-3z-3-16y+16=0$$

$$\boxed{-17x+24y-3z=-14}$$