



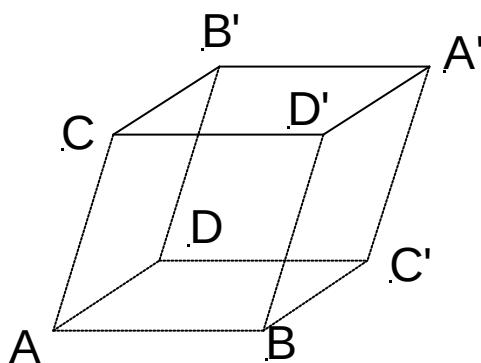
Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

- 1) Un quadrat de l'espai té tres dels seus vèrtexs consecutius situats en els punts de coordenades enteres $P(3,-2,4)$, $Q(a,-1,a+1)$, $R(2,-3,0)$. S és el 4t vèrtex.
 - a) Tenint en compte que els vectors $\overrightarrow{QP}$ i $\overrightarrow{QR}$ han de ser perpendiculars, calculeu el valor del nombre "a".
 - b) Trobeu el seu centre (C) del quadrat. (recordeu que els diagonals d'un paral·lelogram es tallen en el punt mig)
 - c) Calculeu el quart vèrtex d'aquest quadrat (S).
 - d) Calculeu l'àrea d'aquest quadrat.
- 2) Els punts $A(1,1,1)$, $B(2,-1,1)$, $C(0,2,2)$ i $D(-1,-2,2)$ són vèrtexs d'un paral·lelepíped que queda determinat per aquest 3 costats concurrents AB, AC i AD tal com mostra el dibuix.

(0,5*4=2 punts)



- a) Calculeu els altres vèrtexs.
- b) Comprova que totes les diagonals (AA' , BB' , etc.) es tallen en el seu punt mig. Quin és?
- c) Calculeu el volum d'aquest paral·lelepíped.
- d) Equació del pla que passa pel punts A, B i D
- e) Equació de la diagonal que uneix A i A'

(1+0,25+0,75+0,5*2=3 punts)

- 3) Donades les rectes $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+4}{3}$ i $s: \begin{cases} x+y-2z = 0 \\ 2x-y+z = 6 \end{cases}$

- a) Trobeu un punt i un vector director de cadascuna d'elles.
- b) Estudieu la seva posició relativa.

(1,5*2=3 punts)

- 4) Donada la recta $r: \begin{cases} x+y+z = 1 \\ -x-2y+z = 0 \end{cases}$ i el pla $b: 2x+y+mz = n$

- a) Determineu "m" i "n" per a que la recta estigui continguda en el pla.
- b) Doneu un punt i un parell de vectors directores del pla b .

(0,75*2+0,5=2 punts)



Nom i Cognoms:

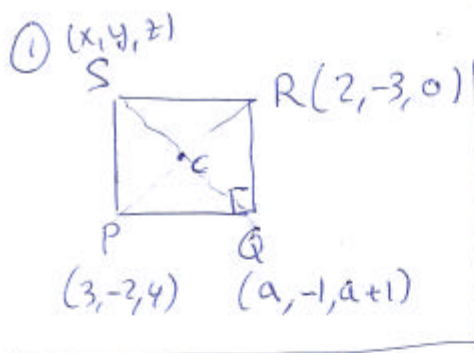
Grup:

Data:

- 1) Un quadrat de l'espai té tres dels seus vèrtexs consecutius situats en els punts de coordenades enteres $P(3, -2, 4)$, $Q(a, -1, a+1)$, $R(2, -3, 0)$. S'és el 4t vèrtex.
- Tenint en compte que els vectors $\overrightarrow{QP}$ i $\overrightarrow{QR}$ han de ser perpendiculars, calculeu el valor del nombre "a".
 - Trobeu el seu centre (C) del quadrat. (recordeu que els diagonals d'un paral·lelogram es tallen en el punt mig)
 - Calculeu el quart vèrtex d'aquest quadrat (S).
 - Calculeu l'àrea d'aquest quadrat.

(0,5*4=2 punts)

① (x, y, z)



$\overrightarrow{QP} = (3-a, -1, 3-a)$
 $\overrightarrow{QR} = (2-a, -2, -a-1)$
 $\Rightarrow \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = 0$
 $(3-a)(2-a) + 2 + (3-a)(-a-1) = 0$
 $6 - 3a - 2a + a^2 + 2 - 3a - 3 + a^2 + a = 0$
 $2a^2 - 7a + 5 = 0 \Rightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4} = \frac{7 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \\ \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$

Com $a = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$ no val

Així doncs $\boxed{a=1}$ i $Q(1, -1, 2)$

b) C és el pt mig de $\overline{PR} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}}{2} = \left(\frac{5}{2}, \frac{-5}{2}, 2\right)$

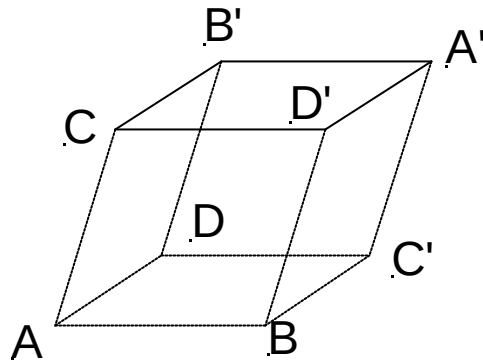
c) $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{QP}$ o C és el pt mig de $\overline{SQ}$
 $\left(\frac{5}{2}, \frac{-5}{2}, 2\right) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z+2}{2}\right)$

$\frac{5}{2} = \frac{x+1}{2} \mid \frac{-5}{2} = \frac{y-1}{2} \mid 2 = \frac{z+2}{2} \Rightarrow S(4, -4, 2)$
 $x=4 \mid y=-4 \mid z=2$

d) Àrea = costat² = $|\overrightarrow{PQ}|^2 = \left(\sqrt{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}}\right)^2 = (-4^2 + 1^2 + (-2)^2)$
 $\overrightarrow{PQ} = (-2, 1, -2)$

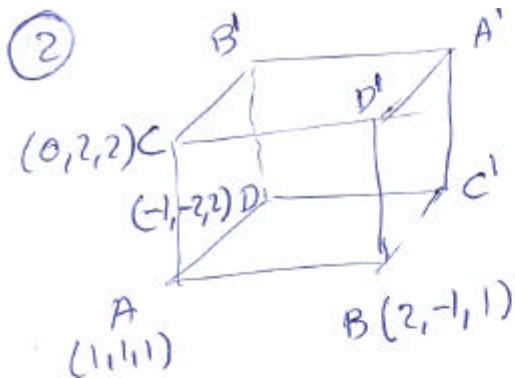
$\Rightarrow \text{Àrea} = 4 + 1 + 4 = 9 \text{ unitats}^2$

- 2) Els punts $A(1,1,1)$, $B(2,-1,1)$, $C(0,2,2)$ i $D(-1,-2,2)$ són vèrtexs d'un paral·lel·lepíped que queda determinat per aquest 3 costats concurrents AB , AC i AD tal com mostra el dibuix.



- Calculeu els altres vèrtexs.
- Comprova que totes les diagonals (AA' , BB' , etc.) es tallen en el seu punt mig. Quin és?
- Calculeu el volum d'aquest paral·lel·lepíped.
- Equació del pla que passa pel punts A , B i D
- Equació de la diagonal que uneix A i A'

(1+0,25+0,75+0,5*2=3 punts)



a)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{C'D'} &= \overrightarrow{BC} \\ (-2, -3, 1) &= (x-2, y+1, z-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -4 \\ z &= 2 \end{aligned} \quad \boxed{C'(0, -4, 2)}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B'D'} &= \overrightarrow{AC} \\ (x-2, y-2, z-2) &= (-2, 3, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -2 \\ y &= -1 \\ z &= 3 \end{aligned} \quad \boxed{B'(-2, -1, 3)}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{D'A'} &= \overrightarrow{AB} \\ (x, y-2, z-2) &= (1, -2, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 0 \\ z &= 2 \end{aligned} \quad \boxed{D'(1, 0, 2)}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{D'A'} &= \overrightarrow{AD} \\ (x-1, y, z-2) &= (-2, -3, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= -3 \\ z &= 3 \end{aligned} \quad \boxed{A'(-1, -3, 3)}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{b) } \left. \begin{array}{l} A(1,1,1) \\ A'(-1,-3,3) \end{array} \right\} \text{PT } N_j(0,-1,2) \\
 \left. \begin{array}{l} B(2,-1,1) \\ B'(-2,-1,3) \end{array} \right\} \text{PT } N_j(0,-1,2)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} C(0,2,2) \\ C'(0,-4,2) \end{array} \right\} \text{PT } M_j(0,-1,2) \\
 \left. \begin{array}{l} D(-1,-2,2) \\ D'(1,0,2) \end{array} \right\} \text{PT } N_j(0,-1,2)
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } V_{\text{OLUNA}} &= \left| [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] \right| = \left| \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = \\
 &= \left| +1 + 0 + 4 - 0 - 2 + 3 \right| = \left| +6 \right| = 6 \text{ unitats}^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \pi(A, B, D) &= \pi(A, \vec{AB}, \vec{AD}) \Rightarrow \text{EQ. CONTINUA} \\
 \begin{array}{l} A(1,1,1) \\ \vec{AB} = (1,-2,0) \\ \vec{AD} = (-2,3,1) \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} x-1 \quad | \quad -2 \\ y-1 \quad | \quad -3 \\ z-1 \quad | \quad 1 \end{array} \right. = 0 \\
 & -2x - y - 7z + 10 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } r(A, A') &= r(A, \vec{AA'}) \left\{ \begin{array}{l} \text{EQ. CONTINUES} \\ \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-1}{2} \end{array} \right. \\
 \begin{array}{l} A(1,1,1) \\ \vec{AA'} = (-2,-4,2) \\ \circ \quad (1,2,-1) \end{array} &
 \end{aligned}$$

3) Donades les rectes $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+4}{3}$ i $s: \begin{cases} x+y-2z = 0 \\ 2x-y+z = 6 \end{cases}$

- Trobeu un punt i un vector director de cadascuna d'elles.
- Estudieu la seva posició relativa.

(1,5*2=3 punts)

$$\textcircled{3} \quad r: \left\{ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+4}{3} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R(1,0,-4) \\ \vec{v}_r = (2,-2,3) \end{array} \right.$$

S. solucions al sistema per trobar les ^{eq.} paramètriques

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 2 & -1 & 1 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -3 & 5 & | & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{F_2}{-3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & | & -2 \end{pmatrix} \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 2z \\ 0 & 1 & | & -2 - \frac{5z}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \forall d \in \mathbb{R} \quad \left. \begin{aligned} x &= 2d - y = 2d + 2 - \frac{5d}{3} = 2 + \frac{d}{3} \\ y &= -2 + \frac{5d}{3} \\ z &= d \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 2 + d/3 \\ y &= -2 + 5d/3 \\ z &= d \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S(2, -2, 0)$$

$$\vec{v}_S = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, 1 \right) \text{ o } (1, 5, 3)$$

$$P_3(v_r, v_s) = 2 \quad \left(\frac{2}{1} - \frac{-3}{5} = \frac{3}{5} \right) \text{ No}$$

no s'en
creuen
secció en
1 pt.

$$\vec{RS} = (1, -2, 4)$$

$$S(2, -2, 0)$$

$$R(1, 0, -4)$$

$$P_3(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{RS})$$

$$L \neq \infty \geq 2$$

Per tant No s'en
creuen de 3
si pot ser 3
o No

Coma que decidim estudiar el

$$\det(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{RS}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C1-C2 \\ C3-C2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & -7 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 + 0 + 0 - 0 - 8 + 21 \neq 0 \Rightarrow \text{no s'en creuen}$$

4) Donada la recta $r: \begin{cases} x+y+z = 1 \\ -x-2y+z = 0 \end{cases}$ i el pla $b: 2x+y+mz = n$

- a) Determineu "**m**" i "**n**" per a que la recta estigui continguda en el pla.
b) Doneu un punt i un parell de vectors directors del pla b .

(0,75*2+0,5=2 punts)

④ a) Podem fer el SISTEMA d'equacions i trobar que veu S.C.I amb 1 grau de llibertat

$$\Rightarrow R_1(\text{SISTEMA}) = 2$$

$$R_1(\text{SIST. AMPLIAT}) = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & m & n \end{pmatrix}$$

$$R_2 \neq 0 \Rightarrow R_2(\text{SIST}) \geq 2$$

Mem d'IRP que no és 3. $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{matrix} C2-C1 \\ C3-C1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & m-2 \end{vmatrix} = 0$$

Desenv per F1

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & (m-2) \end{vmatrix} = 0$$

$$-m+2+2=0$$

$$\boxed{m=4}$$

I era abast d' $n_2 \neq 0$ amb la terna de termes indep^{FP3} ha de donar un $\det = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = -m + 0 + 1 + 2 - 0 - 0 =$$

C2-C1

$$= -m + 3 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad m = 3$$

Així doncs el Sistema és S.C.I amb un grau de llibertat $(\Rightarrow) \quad m = 4$
i $n = 3$

b) $2x + y + mz = n$ S.C.I amb 2 graus de llibertat

Agora com a paràmetres les x i z

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= d \quad \forall d, \mu \in \mathbb{R} \\ z &= \mu \\ y &= n - 2d - m\mu \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= d \\ y &= n - 2d - m\mu \\ z &= \mu \end{aligned} \right\} \forall d, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow P(0, n, 0) \in \Pi$$

$$\vec{u} = (1, -2, 0)$$

$$\vec{v} = (0, -m, 1)$$

$\rangle$ Són un parell de vectors directes de Π .