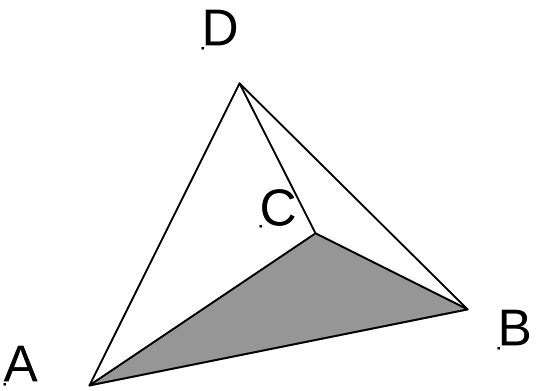
Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) En certa referència ortonormal els punts A(–1,2,3), B(0,1,b), C(5,0,–1) i D(0,d,4) determinen un tetràedre. Trobeu:



a) El valor de "b" sabent que la cara ABC és un triangle isòsceles, amb costats iguals AB i BC.
b) Per aquest valor de "b" calculeu l'angle B del triangle de la cara ABC.
c) El valor de "d" sabent que la cara ACD és un triangle rectangle amb l'angle recte en A.
d) Per aquests valors de "b" i "d", calculeu el volum del tetràedre ABCD

(0,75*3+1=3,25 punts)

2) Trobeu l'equació de la recta **s** que passa pel punt **S**(1,–1,1) i que és paral·lela a la recta **r:** X=Y=Z

(0,75 punts)

3) Donades les rectes **r** i **s**

r: $2x-10=y-3=\dfrac{2z-8}{3}$ i **s**: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+3t \quad \forall t \in R \\ z = 1+4t \end{cases}$

a) Trobeu un punt i un vector director de cadascuna de les rectes.
b) Estudieu la seva posició relativa.
c) Existeix algun pla que conté aquestes dues rectes? Cas afirmatiu, trobeu les equacions paramètriques d'aquest pla.

(1,5+1,5+0,5=3,5 punts)

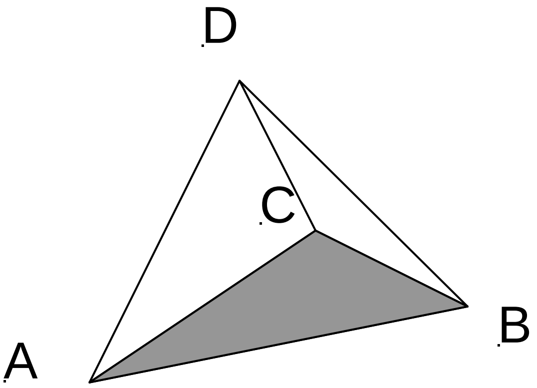
4) Considereu la recta **r** de l'espai que passa pel punt **R**(1,1,3) i té per vector director $\vec{v_r}$ =(1–a, a, 1). Sigui p el pla que té per equació 2x+y–z=1

a) Discutiu la posició relativa de la recta **r** respecte el pla p (paral·lela, continguda o amb un punt d'intersecció) depenent del valor del paràmetre "a".
b) Si la recta **r** fos perpendicular al pla quina relació tindrien els vectors $\vec{v_r}$ i el vector normal al pla p ($\vec{V}_{\perp p}$)?. Hi ha alguna de les rectes **r** que sigui perpendicular al pla p ?

(1,5+1=2,5 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) En certa referència ortonormal els punts A(–1,2,3), B(0,1,b), C(5,0,–1) i D(0,d,4) determinen un tetràedre. Trobeu:



a) El valor de "b" sabent que la cara ABC és un triangle isòsceles, amb costats iguals AB i BC.
b) Per aquest valor de "b" calculeu l'angle B del triangle de la cara ABC.
c) El valor de "d" sabent que la cara ACD és un triangle rectangle amb l'angle recte en A.
d) Per aquests valors de "b" i "d", calculeu el volum del tetràedre ABCD

(0,75*3+1=3,25 punts)

1)

a) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$

$\overrightarrow{AB} = (1, -1, b-3) = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (5, 1, -1-b)$

$\sqrt{1^2+(-1)^2+(b-3)^2} = \sqrt{5^2+1^2+(-1-b)^2}$

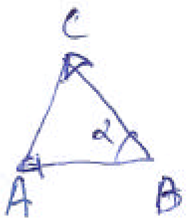
$\Rightarrow \cancel{1}+\cancel{1}+\cancel{b^2}-6b+9 = 25+\cancel{1}+\cancel{1}+2b+\cancel{b^2}$

$9-25 = 8b$

$-16 = 8b$

$\boxed{-2=b}$

b)



$\alpha = \sphericalangle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

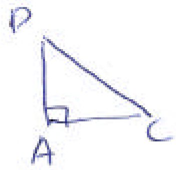
$\overrightarrow{BA} = (-1, 1, 5)$

$\overrightarrow{BC} = (5, -1, 1)$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC}| \cdot \cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC}|} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\cancel{-5}-1+\cancel{5}}{\sqrt{1+1+25}\,\sqrt{1+1+25}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{-1}{(\sqrt{27})^2} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\dfrac{-1}{27}\right) = 92{,}123^\circ$

c) 

$\Rightarrow \vec{AC} \perp \vec{AD}$

$(6,-2,-4) \perp (1, d-2, 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow (6,-2,-4) \cdot (1, d-2, 1) = 0 \Rightarrow 6-2d+4-4=0$

$6=2d$

$\boxed{3=d}$

d) $V = \frac{1}{6}\left|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -5 & -4 & 1 \end{vmatrix}\right| \xRightarrow{\substack{F2+F1 \\ F3-F1}}$

$\vec{AB} = (1,-1,-5)$

$\vec{AC} = (6,-2,-4)$

$\vec{AD} = (1,1,1)$

$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -6 & -10 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|0-72+0+24-0+20| =$

$V = \frac{1}{6}|-28| = \frac{14}{3} u^3$

2) Trobeu l'equació de la recta **s** que passa pel punt **S**(1,–1,1) i que és paral·lela a la recta **r:** X=Y=Z

(0,75 punts)

2 $s \begin{cases} \text{pt } S(1,-1,1) \\ v_s = \vec{v}_r = (1,1,1) \end{cases}$ $\boxed{\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}}$ o

també $\left.\begin{matrix} x-1=y+1 \\ y+1=z-1 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} x-y=-2 \\ y-z=-2 \end{matrix}\right\}$

3) Donades les rectes **r** i **s**

r: $2x-10 = y-3 = \dfrac{2z-8}{3}$ i **s**: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+3t \quad \forall t \in R \\ z = 1+4t \end{cases}$

a) Trobeu un punt i un vector director de cadascuna de les rectes.
b) Estudieu la seva posició relativa.
c) Existeix algun pla que conté aquestes dues rectes? Cas afirmatiu, trobeu les equacions paramètriques d'aquest pla.

(1,5+1,5+0,5=3,5 punts)

3

a) r $\dfrac{2x-10}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{2z-8}{3}$

$\dfrac{x-5}{1/2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-4}{3/2}$ $\Rightarrow$ $R(5,3,4) \in r$, $\vec{v_r} = (1/2, 1, 3/2)$ o $\underline{(1,2,3)}$

$s: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+3t \\ z = 1+4t \end{cases}$ $\forall t \in R \Rightarrow$ $S(1,1,1)$, $\vec{v_s} = (2,3,4)$

b) $Rg(\vec{v_r}, \vec{v_s}) = 2$ $\Rightarrow$ r i s es creuen o es tallen en un ÚNIC PT.

$\left(\frac{1}{2} = \frac{2}{3} = \frac{3}{4}\right)$ NO

$\vec{SR} = \vec{OR} - \vec{OS} = (4,2,3)$

$Rg(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \vec{SR}) \geq 2$ Per tant només cal veure si pot ser 3.

són L.I. $\Rightarrow$ Així doncs mirant el

det $(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \vec{SR})$ és suficient

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{C1-C3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$

$Rg(\vec{v_r}, \vec{v_s}, \vec{SR}) = 3 \Rightarrow$ r i s es CREUEN

c) Com r i s es creuen $\Rightarrow$ $\nexists$ un pla que les contingui

4) Considereu la recta **r** de l'espai que passa pel punt **R**(1,1,3) i té per vector director $\vec{v_r}$ =(1–a, a, 1). Sigui p el pla que té per equació 2x+y–z=1

a) Discutiu la posició relativa de la recta **r** respecte el pla p (paral·lela, continguda o amb un punt d'intersecció) depenent del valor del paràmetre "a".

b) Si la recta **r** fos perpendicular al pla quina relació tindrien els vectors $\vec{v_r}$ i el vector normal al pla p ($\vec{V}_{\perp p}$)?. Hi ha alguna de les rectes **r** que sigui perpendicular al pla p ?

(1,5+1=2,5 punts)

4

$r \begin{cases} R(1,1,3) \\ \vec{V_r} = (1-a, a, 1) \end{cases}$ $\quad$ $2x+y-z=1$ $\quad \pi \begin{cases} V_{\perp\pi} = (2, 1, -1) \\ \text{pt } P(0,1,0) \in \pi \end{cases}$

a) $\vec{V_r} \perp \vec{V_{\perp\pi}}$?

Són $\perp \iff \vec{V_r} \cdot \vec{V_{\perp\pi}} = 0 \iff 2(1-a)+a-1=0$

$2-2a+a-1=0$

$\boxed{1=a}$

$\boxed{\text{CAS I}}$ $\quad a \neq 1 \Rightarrow V_r \not\perp V_{\perp\pi} \Rightarrow$ r i π es tallen en UN PUNT

CAS II $\quad a=1 \Rightarrow V_r \perp V_{\perp\pi} \Rightarrow \begin{cases} r // \pi \\ \text{o} \\ r \subset \pi \end{cases}$

Puc decidir comprovant per exemple si

$R \in \pi$: $2x+y-z=1$ $\quad$ (1,1,3) $\quad \begin{cases} 2\cdot1+1-1=1 \quad \text{NO} \Rightarrow \\ \Rightarrow r \cap \pi = \emptyset \quad \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow r // \pi$ són PARAL·LELES

CONCLUSIÓ $\begin{cases} a \neq 1 & r \text{ i } \pi \text{ es tallen en UN PUNT} \\ a = 1 & r // \pi \end{cases}$

b) $r \perp \pi \Rightarrow \vec{V_r}$ és un vect. $\perp$ a $\pi \Rightarrow V_r$ i $V_{\perp\pi}$ L.D

$\left.\begin{array}{l} \vec{V_r} = (1-a, a, 1) \\ V_{\perp\pi} = (2, 1, -1) \end{array}\right\} \text{L.D} \iff \dfrac{1-a}{2} = \dfrac{a}{1} = \dfrac{1}{-1}$

$\boxed{a=-1}$

$\dfrac{1-(-1)}{2} = \dfrac{-1}{1}$ No!! $\Rightarrow$ No es verifica

$\Rightarrow \nexists\, a$ t.q. $r \perp \pi$