



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

1) Donades les rectes

$$r \begin{cases} \frac{2x-4}{4} = y-1 = \frac{-z}{2} \end{cases}, s \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+z=5 \end{cases} \text{ i el punt } B(0,4,-3).$$

- Doneu un punt i un vector director de cadascuna de les rectes
- Estudieu la seva posició relativa
- Trobeu la distància entre r i s
- Trobeu la recta perpendicular comuna a r i s
- Trobeu la recta t que és paral·lela a r i que passa pel punt $B(0,4,-3)$ que també és de la recta s .
- Calculeu l'angle que formen s i t

(1+0,5*2+1+0,5*2=4 punts)

2) Donat el pla $p: x+2y+3z+D=0$, calculeu el valor de D per a que el tetràedre format per l'origen de coordenades i els talls del pla p amb els eixos coordenats sigui un tetràedre de volum 6 unitats³

(2 punts)

3) Donats els plans $a: x-2y+2z=1$ i $b: 3x=5$.

- Trobeu el lloc geomètric del punts de l'espai tals que la distància al pla a sigui el doble de la distància al pla b
- Justifiqueu que la solució de a) són dos plans i trobeu l'angle que formen entre ells.

(2 punts)

4) Donats els punt $A(2,0,2)$ i el pla $a: x-y+z=1$ trobeu:

- La projecció perpendicular del punt A sobre el pla a
- El punt simètric del punt A respecte el pla a

(2 punts)

1) Donades les rectes

$$r \begin{cases} \frac{2x-4}{4} = y-1 = \frac{-z}{2} \\ x+y+z=1 \\ 2y+z=5 \end{cases} \text{ i el punt } B(0,4,-3).$$

- Doneu un punt i un vector director de cadascuna de les rectes
- Estudieu la seva posició relativa
- Trobeu la distància entre r i s
- Trobeu la recta perpendicular comuna a r i s
- Trobeu la recta t que és paral·lela a r i que passa pel punt $B(0,4,-3)$ que també és de la recta s .
- Calculeu l'angle que formen s i t

(1+0,5*2+1+0,5*2=4 punts)

a) ① $r: \frac{x-2}{4} = y-1 = \frac{-z}{2} \Rightarrow R(2,1,0) \in r$
 $\vec{v}_r = (2,1,-2)$

$s: \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=1-y \\ z=5-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ z=5-2\lambda \\ x=1-\lambda-z=1-\lambda-5+2\lambda=-4+\lambda \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x=-4+\lambda \\ y=\lambda \\ z=5-2\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow S(-4,0,5) \in s$
 $\vec{v}_s = (1,1,-2)$

b) $R_3(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = 2$ i ord com $R_3(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{RS})$
 $\left(\frac{2}{1} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{-2} \right) \text{ NO}$
 $\text{LI} \Rightarrow \geq 2$
 $\text{així doncs no hem cal mirar el Rang és 3 o NO} \Rightarrow$

Avem $\det(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{RS}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -6 & -1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{F1-F2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -6 & -1 & 5 \end{vmatrix}$
 $\vec{RS} = \vec{OS} - \vec{OR} = (-6, -1, 5)$

$= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 5-2=3 \neq 0 \Rightarrow R_3(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{RS}) = 3 \Rightarrow \text{ES CREVEN}$

$$c) d(r,s) = \frac{|[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{R}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{|3|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ unidades}$$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (0, 2, 1)$$

d) $t \perp r \Rightarrow \vec{v}_t \perp \vec{v}_r$
 $t \perp s \Rightarrow \vec{v}_t \perp \vec{v}_s$ } $\Rightarrow$ Para achar com $\vec{v}_t = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = (0, 2, 1)$

$$t \left\{ \begin{array}{l} \text{Pto que cont\u00e9 a r} \\ i \perp a s \end{array} \right. \quad \begin{vmatrix} x-2 & 2 & 0 \\ y-1 & 1 & 2 \\ z & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pto que cont\u00e9 a s} \\ i \perp a r \end{array} \right. \quad \begin{vmatrix} x+4 & 1 & 0 \\ y & 1 & 2 \\ z-5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$t \left\{ \begin{array}{l} \bullet x-2 + 4z + 0 - 0 - 2(y-1) + 4(x-2) = 0 \\ \quad \underline{x-2} + \underline{4z} - 2y + 2 + \underline{4x-8} = 0 \\ \quad 5x - 2y + 4z - 8 = 0 \\ \bullet (x+4) + 2(z-5) + 0 - 0 - y + 4(x+4) = 0 \\ \quad \underline{x+4} + \underline{2z-10} - y + \underline{4x+16} = 0 \\ \quad 5x - y + 2z + 10 = 0 \end{array} \right.$$

$$t \left\{ \begin{array}{l} 5x - 2y + 4z - 8 = 0 \\ 5x - y + 2z + 10 = 0 \end{array} \right.$$

e) $t \parallel r_0 \Rightarrow \vec{v}_t$ pot ser $\vec{v}_{r_0} = (2, 1, -2)$

$\frac{x-0}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+3}{-2}$
--

t

$B(0, 4, -3) \in t$

8) Com si t es tallen mentre cal que
 calculem l'angle que calculen $\vec{v}_s$ i $\vec{v}_t$ amb
 en valen absolut men

$$\alpha = \angle(t, s) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{v}_t \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_t| |\vec{v}_s|} = \frac{|2+1+4|}{\sqrt{4+1+4} \sqrt{1+1+4}}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_t &= (2, 1, -2) \Rightarrow \\ \vec{v}_s &= (1, 1, -2) \end{aligned} \quad \cos \alpha = \frac{7}{3\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{18} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{7\sqrt{6}}{18}\right) = 17,72^\circ$$

- 2) Donat el pla $p: x+2y+3z+D=0$, calculeu el valor de D per a que el tetràedre format per l'origen de coordenades i els talls del pla p amb els eixos coordenats sigui un tetràedre de volum 6 unitats³

(2 punts)

② $\pi: x+2y+3z+D=0$

$O(0,0,0)$

$A = \pi \cap \overrightarrow{OX} \quad \left. \begin{array}{l} x+2y+3z+D=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array} \right\} A(-D, 0, 0)$

$B = \pi \cap \overrightarrow{OY} \quad \left. \begin{array}{l} \pi \\ x=0 \\ z=0 \end{array} \right\} B(0, -\frac{D}{2}, 0)$

$C = \pi \cap \overrightarrow{OZ} \quad \left. \begin{array}{l} \pi \\ x=0 \\ y=0 \end{array} \right\} C(0, 0, -\frac{D}{3})$



$V = \frac{1}{6} |[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]| =$

$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} -D & 0 & 0 \\ 0 & -D/2 & 0 \\ 0 & 0 & -D/3 \end{vmatrix} \right| = 0$

$\Rightarrow V = \frac{1}{6} \left| \frac{-D^3}{6} \right| \quad \text{Si } V = 6 \text{ u}^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow |-D^3| = 216 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -D^3 = 216 \Rightarrow D^3 = -216 \\ D^3 = 216 \end{array} \right\}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} D = \sqrt[3]{-216} = -6 \\ D = \sqrt[3]{216} = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Per tant hi ha} \\ 2 \text{ solucions} \\ D = 6 ; D = -6 \end{array}$

3) Donats els plans $a : x - 2y + 2z = 1$ i $b : 3x = 5$.

- Trobeu el lloc geomètric del punts de l'espai tals que la distància al pla a sigui el doble de la distància al pla b
- Justifiqueu que la solució de a) són dos plans i trobeu l'angle que formen entre ells.

(2 punts)

$$\textcircled{3} \quad \alpha : x - 2y + 2z - 1 = 0$$

$$\beta : 3x - 5 = 0$$

a) $P(x, y, z) \quad d(P, \alpha) = d(P, \beta) \cdot 2$

$$\frac{|x - 2y + 2z - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{2|3x - 5|}{\sqrt{3^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z - 1 = (3x - 5) \cdot 2 \\ x - 2y + 2z - 1 = -2(3x - 5) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z - 1 &= 6x - 10 \\ -5x - 2y + 2z + 9 &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{-5x - 2y + 2z + 9 = 0} \quad \pi_1$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z - 1 &= -2(3x - 5) \\ x - 2y + 2z - 1 &= -6x + 10 \\ 7x - 2y + 2z - 11 &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{7x - 2y + 2z - 11 = 0} \quad \pi_2$$

b). Efectivament són 2 plans ja que són Equacions Lineals de 3 INC. no mult. les.
• l'angle que determinen és l'angle que formen els seus vectors normals

$$V_{\perp \pi_1} = (-5, -2, 2) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|V_{\perp \pi_1} \cdot V_{\perp \pi_2}|}{|V_{\perp \pi_1}| |V_{\perp \pi_2}|} \Rightarrow$$

$$V_{\perp \pi_2} = (7, -2, 2)$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{|-35 + 4 + 4|}{\sqrt{49 + 4 + 4} \sqrt{25 + 4 + 4}} \Rightarrow$$

$$\alpha = \arccos \left(\frac{27}{\sqrt{57} \sqrt{33}} \right) = \arccos(0,6225)$$

$$\alpha = 51,4979^\circ$$

4) Donats els punt $A(2,0,2)$ i el pla $\alpha : x - y + z = 1$ trobeu:

- La projecció perpendicular del punt A sobre el pla α
- El punt simètric del punt A respecte el pla α

(2 punts)

4

$$\left. \begin{array}{l} \alpha : A(2,0,2) \\ \alpha : x - y + z = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{recta } \perp \alpha \text{ per } A \\ r = r(A, v_{\alpha}) \end{array}$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}$$

$$R_d \in r \quad R_d(2+d, -d, 2+d) \text{ imposen que}$$

$$R_d \in \alpha \Rightarrow 2+d+d+2+d=1$$

$$3d = -3$$

$$d = -1$$

$$\Rightarrow \Pi = \alpha \cap r \ni R_{d=-1}(1, 1, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} A(2,0,2) \\ \Pi(1,1,1) \\ A'(x,y,z) \end{array} \right\} \Pi \text{ és el pt } N_{\alpha} \text{ de } \overline{AA'}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2+x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z+2}{2} \right) = (1, 1, 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2+x}{2} = 1 ; \frac{y}{2} = 1 ; \frac{z+2}{2} = 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=0 \\ y=2 \\ z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow A'(0,2,0)$$