



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

1) Donades les rectes

$$r \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2y + z = 2 \end{cases} \quad \text{i} \quad s \begin{cases} x = \frac{4-y}{-1} = \frac{2z+6}{-4} \end{cases}$$

- Doneu un punt i un vector director de cadascuna de les rectes
- Estudieu la seva posició relativa
- Trobeu la distància entre r i s
- Equació implícita o general del pla p que conté a la recta s i és paral·lel a la recta r .
- Trobeu la distància entre r i aquest pla p

(1+0,5*2+1+0,5=3,5 punts)

2) Trobeu el pla p del feix de plans que passen per la recta $r \begin{cases} y = 0 \\ 3x + z - 3 = 0 \end{cases}$ tal que el tetràedre format per l'origen de coordenades i els talls del pla p amb els eixos coordenats sigui un tetràedre de volum $\frac{3}{2} \text{unitat}^3$

(2 punts)

3) Donats el punt $A(2, -1, 5)$ i $B(5, -4, 20)$

- Trobeu el punt M de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ tal que la distància al punt A sigui el doble de la distància al punt B
- Trobeu el lloc geomètric dels punts P de l'espai tals que el vector $\overrightarrow{PM}$ és perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{AB}$. Què és el que queda com a solució?

(2 punts)

4) Donats el punt $B(6, 1, 1)$ i la recta $r \begin{cases} \frac{x-3}{3} = y-1 = z+1 \end{cases}$ trobeu

- La projecció perpendicular del punt B sobre la recta r
- El punt simètric del punt B respecte la recta r

(1,5+1=2,5 punts)



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

1) Donades les rectes

$$r \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2y + z = 2 \end{cases} \quad i \quad s \begin{cases} x = \frac{4-y}{-1} = \frac{2z+6}{-4} \end{cases}$$

- Doneu un punt i un vector director de cadascuna de les rectes
- Estudieu la seva posició relativa
- Trobeu la distància entre r i s
- Equació implícita o general del pla p que conté a la recta s i és paral·lel a la recta r .
- Trobeu la distància entre r i aquest pla p

(1+0,5*2+1+0,5=3,5 punts)

① a) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$ Agafa y com a paràmetre
 $\begin{cases} x = 1 + 2d \\ y = d \\ z = 2 - 2d \end{cases} \Rightarrow R(1, 0, 2) \in r$
 $\vec{V}_r = (2, 1, -2)$

$s: \begin{cases} x = \frac{4-y}{-1} = \frac{2z+6}{-4} \end{cases} \Rightarrow S(0, 4, -3)$
 $\vec{V}_s = (1, 1, -2)$

b) $R_g(\vec{V}_r, \vec{V}_s) = 2 \neq 0$
 Com No són proporcionals ja que: $\left(\frac{2}{1} = \frac{1}{1} = \frac{-2}{-2}\right) \neq 0$
 $\Rightarrow r$ i s es creuen o es tallen en un pt.
 Anem $R_g(\vec{V}_r, \vec{V}_s, \vec{RS})$
 Com $2 \neq 0$ ja sabem que $\hat{a} \geq 2$ i no tenim
 cap més $\hat{a} = 3$ o No, per fer-ho

Calculem
 $\det(\vec{V}_r, \vec{V}_s, \vec{RS}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -5 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -5 \end{vmatrix} =$
 $\vec{RS} = \vec{OS} - \vec{OR} = (-1, 4, -5)$

Desenv
 $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 8 = +3 \neq 0 \Rightarrow R_g(\vec{V}_r, \vec{V}_s, \vec{RS}) = 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow r$ i s es creuen

c) $d(r, s) = \frac{|\det(\vec{V}_r, \vec{V}_s, \vec{RS})|}{|\vec{V}_r \times \vec{V}_s|} = \frac{|3|}{\sqrt{0^2 + 7^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{50}} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$

$\vec{V}_r \times \vec{V}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (0, 2, 1)$

$$d) \pi \nmid q \quad S \subset \pi \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (0,4,-3) \\ S \in S \Rightarrow S \in \pi \\ \vec{v}_s \text{ està en } \pi \\ r \parallel \pi \Rightarrow \vec{v}_r \text{ està en } \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi = \pi(S, \vec{v}_s, \vec{v}_r)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y-4 & 1 & 1 \\ z+3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{I ara calculo per trobar la general.}$$

Eg. CONTINUA

C2-C3

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-4 & 0 & 1 \\ z+3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Desen} \\ \text{C2} \end{array} \Rightarrow - \begin{vmatrix} y-4 & 1 \\ z+3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$z+3 + 2(y-4) = 0$$

$$z+3 + 2y - 8 = 0$$

$$\pi \quad \boxed{2y + z - 5 = 0}$$

$$e) \text{ con } r \parallel \pi \quad d(r, \pi) = d(R, \pi) =$$

$$R \in \rho \quad R(1,0,2)$$

$$= \frac{|2-5|}{\sqrt{0^2+2^2+1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ unitats}$$

que coincideix amb el resultat de $d(r, s)$

- 2) Trobeu el pla p del feix de plans que passen per la recta $r \begin{cases} y=0 \\ 3x+z-3=0 \end{cases}$ tal que el tetràedre format per l'origen de coordenades i els talls del pla p amb els eixos coordenats sigui un tetràedre de volum $\frac{3}{2} \text{unitat}^3$

(2 punts)

② Seia un $\pi_d: 3x+z-3+dy=0$
(Compte que inclou el $y=0$)
Ara calculeu els Vértexos del Tetràedre

$O(0,0,0)$

$$A = \pi_d \cap \overrightarrow{OX} \left\{ \begin{array}{l} \pi_d \\ y=0 \\ z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow (1,0,0) A$$

$$B = \pi_d \cap \overrightarrow{OY} \left\{ \begin{array}{l} \pi_d \\ x=0 \\ z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow (0, \frac{3}{d}, 0) B$$

$$C = \pi_d \cap \overrightarrow{OZ} \left\{ \begin{array}{l} \pi_d \\ x=0 \\ y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow (0, 0, 3) C$$

Volum Tetràedre de Vértexos $OABC =$

$$\frac{1}{6} |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{d} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \left| \frac{9}{d} \right| \Rightarrow$$

$$\text{Si } V = \frac{3}{2} \text{ unitat}^3$$

$\Rightarrow$ Com hi ha UN VALOR ABSOLUT hi ha 2 solucions

$$\left| \frac{9}{d} \right| = \frac{3}{2} \cdot 6 \quad \begin{cases} \frac{9}{d} = 9 \Rightarrow d = 1 \\ \frac{9}{d} = -9 \Rightarrow d = -1 \end{cases}$$

Així doncs tenim dues solucions

$$\pi_{d=1} \quad 3x+y+z-3=0$$

$$\pi_{d=-1} \quad 3x-y+z-3=0$$

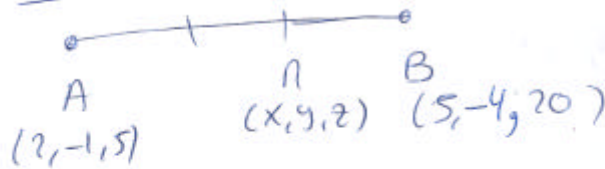
3) Donats el punt $A(2, -1, 5)$ i $B(5, -4, 20)$

- a) Trobeu el punt M de la recta $\overline{AB}$ tal que la distància al punt A sigui el doble de la distància al punt B
- b) Trobeu el lloc geomètric dels punts P de l'espai tals que el vector $\overrightarrow{PM}$ és perpendicular a la recta $\overline{AB}$. Què és el que queda com a solució?.

(2 punts)

③

a) I CAS $\Rightarrow n \in \overline{AB}$ (segment)



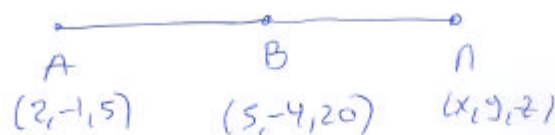
$$\overrightarrow{An} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \Rightarrow (x-2, y+1, z-5) = \frac{2}{3} (3, -3, 15)$$

$$(x-2, y+1, z-5) = (2, -2, 10)$$

$$\begin{array}{l|l|l} x-2=2 & y+1=-2 & z-5=10 \\ \hline x=4 & y=-3 & z=15 \end{array}$$

$$n(4, -3, 15)$$

a) II CAS $\Rightarrow$ la situació en de n fora del segment $\overline{AB}$



$$\text{com } \overrightarrow{An} = 2 \overrightarrow{Bn} \Rightarrow$$

$\circ$ B és el pt N_2 de $\overline{An}$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z+5}{2} \right) = (5, -4, 20) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l|l|l} \frac{x+2}{2}=5 & \frac{y-1}{2}=-4 & \frac{z+5}{2}=20 \\ \hline x=8 & y=-7 & z=35 \end{array}$$

$$\Rightarrow n(8, -7, 35)$$

també es poden fer els dos casos junts com ho ha fer la Maria Molano:

3) $A(2, -1, 5) \quad B(5, -4, 20)$

a) $M \in \overline{AB}$ i q. $\text{dist}(A, M) = 2 \text{dist}(B, M)$

• $r: r(A, \overline{AB}) \rightarrow r \begin{cases} x = 2 + 3d \\ y = -1 - 3d \\ z = 5 + 15d \end{cases} \quad \forall d \in \mathbb{R}$

$\overline{AB} = (3, -3, 15)$

$\vec{v}_r = (3, -3, 15)$

• $M(2+3d, -1-3d, 5+15d)$

$\overline{AM} = (3d, -3d, 15d)$

$\overline{BM} = (-3+3d, 3-3d, -15+15d)$

• $|\overline{AM}| = 2|\overline{BM}|$; $\sqrt{3d^2 + (-3d)^2 + (15d)^2} = 2\sqrt{(-3+3d)^2 + (3-3d)^2 + (-15+15d)^2}$

$9d^2 + 9d^2 + 225d^2 = 4(9d^2 - 18d + 9 + 9d^2 - 18d + 9 + 225d^2 - 450d + 225)$

$243d^2 = 4(243d^2 - 486d + 243)$; $243d^2 = 4 \cdot 243(d^2 - 2d + 1)$

$d^2 = 4d^2 - 8d + 4$; $3d^2 - 8d + 4 = 0$

$d = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3}$

$\begin{cases} d=2 \\ d=2/3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_1 = (8, -7, 35) \\ M_2 = (4, -3, 15) \end{cases}$

NOCT
BE

b) $P(x, y, z) \quad \overline{PM} \perp \overline{AB}$ a diferència n(4, -3, 15) i l'altre semblant

$(x-4, y+3, z-15) \cdot (3, -3, 15) = 0$

$3x - 12 - 3y - 9 + 15z - 225 = 0$

$3x - 3y + 15z = 246$

$\boxed{x - y + 5z = 82}$ π que és un pla

4) Donats el punt $B(6,1,1)$ i la recta $r \begin{cases} \frac{x-3}{3} = y-1 = z+1 \end{cases}$ trobeu

- La projecció perpendicular del punt B sobre la recta r
- El punt simètric del punt B respecte la recta r

(1,5+1=2,5 punts)

④ $B(6,1,1)$

$$r \begin{cases} \frac{x-3}{3} = y-1 = z+1 \end{cases}$$



Per Bureca la PROJECCIÓ $\perp$ de B sobre r
 Agafem un $R_d \in r$ arbitrari

$$R_d(3+3d, 1+d, -1+d) \in r$$

$$\text{i imposen que } \overrightarrow{BR_d} \perp \overrightarrow{V_r} = 0$$

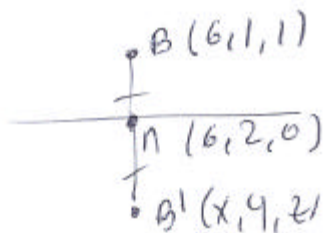
$$(-3+3d, -d, -2+d) \cdot (3, 1, 1) = 0$$

$$\Rightarrow -9 + 9d - d - 2 + d = 0$$

$$11d - 11 = 0$$

$$d = \frac{11}{11} \Rightarrow \boxed{d=1}$$

$$n = R_{d=1}(6, 2, 0)$$



$$n \text{ és el PT } N_j \text{ de } \overline{BB'}$$

$$\left(\frac{6+x}{2}, \frac{1+y}{2}, \frac{1+z}{2} \right) = (6, 2, 0)$$

$$x=6; y=3; z=-1$$

$$B'(6, 3, -1)$$