Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
Institut d'Educació Secundària
Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
2n BATX MA
Geometria

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Donats els vectors $\vec{a}(1,-1,0)$, $\vec{b}(0,1,-1)$ i $\vec{c}=m\vec{a}-\vec{b}$

a) Trobeu el valor de m perquè $\vec{a}$ i $\vec{c}$ siguin perpendiculars.

b) **Per a m=2 trobeu l'angle que formen $\vec{b}$ i $\vec{c}$**

a) $\vec{c}=m\vec{a}-\vec{b}=m(1,-1,0)-(0,1,-1)=(m,-m-1,1)$

$\vec{a}\perp\vec{c}\rightarrow\vec{a}\cdot\vec{c}=(1,-1,0)\cdot(m,-m-1,1)=m+m+1=2m+1=0 \quad\rightarrow\quad m=-\dfrac{1}{2}$

b) Per a $m=2$, queda $\vec{c}(2,-3,1)$ Si anomenem α a l'angle que formen $\vec{b}$ i $\vec{c}$, tenim que:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|}=\frac{-4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}}=\frac{-4}{\sqrt{28}}\approx-0{,}7559 \quad\rightarrow\quad \alpha=139{,}1066^{o}=139^{o}\,6'\,23{,}78''$$

(1,5 punts)

2) Donats els vectors $\vec{u}(1,3,0)$ i $\vec{v}(2,1,1)$:

a) Trobeu un vector, $\vec{w}$, de mòdul 1, que sigui perpendicular a $\vec{u}$ i a $\vec{v}$.

b) **Quina és l'àrea del paral·lelogram deteminat per $\vec{u}$ i $\vec{v}$?**

a) Un vector perpendicular a $\vec{u}$ i a $\vec{v}$ és: $\vec{u}\wedge\vec{v}=(1,\ 3,\ 0)\wedge(2,\ 1,\ 1)=(3,\ -1,\ -5)$

Dividim pel seu mòdul per aconseguir que tingui mòdul 1:

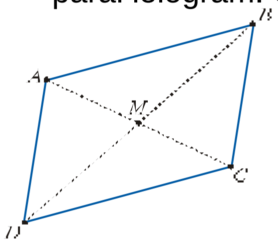
$$\vec{w}=\frac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{|\vec{u}\wedge\vec{v}|}=\left(\frac{3}{\sqrt{35}},\ \frac{-1}{\sqrt{35}},\ \frac{-5}{\sqrt{35}}\right)$$

Hi ha dues solucions : $\left(\dfrac{3}{\sqrt{35}},\dfrac{-1}{\sqrt{35}},\dfrac{-5}{\sqrt{35}}\right)$ i $\left(\dfrac{-3}{\sqrt{35}},\dfrac{1}{\sqrt{35}},\dfrac{5}{\sqrt{35}}\right)$

b) $\text{Àrea}=|\vec{u}\wedge\vec{v}|=\sqrt{35}\approx5{,}92u^2$

(1,5 punts)

3) Els punts $A(3,\ 0,\ 2)$, $B(5,\ -1,\ 1)$ i $C(-2,\ 3,\ 1)$ són vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram. Obteniu el quart vèrtex i el centre del paral·lelogram.



Com que es tracta d'un paral·lelogram, tenim que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Si $D(x,y,z)$:

$(2,-1,-1)=(-2-x,\ 3-y,\ 1-z)$ d'on: $x=-4$, $y=4$, $z=2$ $\rightarrow$ $D(-4,\ 4,\ 2)$

El centre del paral·lelogram és el punt mitjà d'una de les dues diagonals, així:

$$M=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

(1 punt)

4) Calculeu el valor de a per al qual els punts següents estiguin alineats: ***A*(2, a, 0), *B*(6, 5, 2), *C*(8, 7, 3)**

Els punts A, B i C estan alineats sempre que els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ tinguin la mateixa direcció. Això passa quan les seves coordenades són proporcionals:

$$\frac{6-2}{8-6}=\frac{5-a}{7-5}=\frac{2-0}{3-2}$$

$$\frac{5-a}{2}=2 \quad\rightarrow\quad 5-a=4 \quad\rightarrow\quad a=1$$

(0,5 punts)

5)

a) Trobeu **els** valors de m i n per tal que els plans següents siguin paral·lels:

π_1: $2x - y + z - 5 = 0$ i π_2: $mx + ny + 2z + 3 = 0$

b) Trobeu l'equació d'un pla paral·lel a π_1 que passi pel punt $A(3, -2, 1)$.

a) Si π_1 i π_2 han de ser paral·lels, tenim que:

$$\frac{m}{2} = \frac{n}{-1} = \frac{2}{1} \rightarrow m = 4,\ n = -2$$

I a més cal observar que els termes independents no estan en la mateixa proporció $2 \neq \frac{3}{5}$

b) El pla buscat ha de ser de la forma: $2x - y + z + D = 0$

Si conté el punt A, ha de verificar:

$2 \cdot 3 - 1(-2) + 1 + D = 0 \rightarrow D = -9$

El pla serà: $2x - y + z - 9 = 0$

(1,5 punts)

6)

a) Discutiu la posició relativa de les dues rectes següents a l'espai. La primera està donada per $x - 5 = y - 7 = z$, i la segona, pels plans:

$\begin{cases} 2x - 3y + 11 = 0 \\ y - 2z - 7 = 0 \end{cases}$. Expliqueu el procediment.

b) Trobeu, si és possible, el punt d'intersecció.

a) • Primera recta, r : $\begin{cases} \text{Punt: } R(5,7,0) \\ \text{Vector direcció: } \vec{d}_r = (1,1,1) \end{cases}$

• Segunda recta, s,quedadeterminadaper $\begin{cases} \text{Punt: } y = 1,\ x = -4,\ z = -3 \rightarrow S(-4,1,-3) \\ \text{Vector direcció: } \vec{d}_s = (2,-3,0) \wedge (0,1,-2) = (6,4,2) \end{cases}$

També podria haver trobat les equacions paramètriques de la recta. Que segons la variable que agafeu com a paràmetre pot ser una d'aquestes:

$$\begin{cases} x = 5 + 3z \\ y = 7 + 2z \\ z = z \end{cases} \forall z \in R \quad o \begin{cases} x = \frac{-11}{2} + \frac{3}{2}y \\ y = y \\ z = \frac{-7}{2} + \frac{1}{2}y \end{cases} \forall y \in R \quad o \begin{cases} x = x \\ y = \frac{11}{3} + \frac{2}{3}x \\ z = \frac{-10}{6} + \frac{1}{3}y \end{cases} \forall x \in R$$

Per tant puc agafar com Vectors director de s a $\vec{d}_s$=(3,2,1) i com punt un qualsevol d'aquests com per exemple el M(5,7,0), [Compte!!! observeu que és el mateix punt S]

Els vectors direcció $\vec{d}_r$ i $\vec{d}_s$ no són paral·lels. Per tant, r i s es tallen o es creuen.

Per tal d'esbrinar si passa una cosa o l'altra, observem si el vector $\overrightarrow{RS}$, està o no en el mateix pla que $\vec{d}_r$ i $\vec{d}_s$. Per saber-ho, estudiarem el determinant de la matriu formada per les components de $\vec{d}_r$, $\vec{d}_s$ i $\overrightarrow{RS}$. $\overrightarrow{RS} = (-9,-6,-3)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -9 & -6 & -3 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, $\overrightarrow{RS}$ está en el mateix pla que r i s, la qual cosa implica que les rectes r i s es tallen.

b) Expressem la primera recta en paramètriques: $\begin{cases} x = 5 + l \\ y = 7 + l \\ z = l \end{cases}$

Substituïm en un dels plans que defineixen la segona recta: $2(5 + \lambda) - 3(7 + \lambda) + 11 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 0$
Substituïm aquest valor de λ i obtenim $P(5, 7, 0)$. I comprovem que també verifica l'altra equació.

Observis que abans també hem vist que el punt $P(5, 7, 0)$ era de les dues rectes, amb la qual cosa ens haurien estalviat aquest sistema d'equacions.

(3 punts)

7) Donats els plans: π: $4x + my + mz = 6$ i σ: $mx + y + z + 3 = 0$. **Estudieu la seva posició relativa segons els valors de *m*.**

Les equacions dels plans són:

$$\left.\begin{array}{r} 4x + my + mz = 6 \\ mx + y + z = -3 \end{array}\right\}$$

Els coeficients de les incògnites són proporcionals si $m = 2$ o m=–2.

Així doncs tenim els casos següents:

- Sí m=2

  $$\left.\begin{array}{r} 4x + 2y + 2z = 6 \\ 2x + y + z = -3 \end{array}\right\}$$

  Els plans són paral·lels, ja que els seus termes independents no segueixen la mateixa relació de proporcionalitat que els coeficients de les incògnites.

- Sí m=–2

  $$\left.\begin{array}{r} 4x - 2y - 2z = 6 \\ -2x + y + z = -3 \end{array}\right\}$$

  Els plans són iguals ja que Els plans són coincidents, ja que els seus termes independents segueixen la mateixa relació de proporcionalitat que els coeficients de les incògnites.

- Si $m \neq \pm 2$, els plans es tallen en una recta, ja que el sistema és compatible indeterminat de rang 2, és a dir amb un grau de llibertat.

(1 punt)