Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1)

a) Troba l'angle que formen el pla π: $2x - y + 4z - 2 = 0$ i la recta

$$r: \begin{cases} 3x - y - z = -1 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

b) Troba l'angle que formen els plans següents: π_1: $x + y = 0$ $\quad$ π_2: $y - 3z + 2 = 0$

(1+0,5=1,5 Punts)

a) Determinen un vector director de r: $\vec{v}$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 8\vec{j} + 7\vec{k} \qquad \vec{v} = (5, 8, 7)$$

D'altra banda, el vector normal del pla és: $\vec{n} = (2, -1, 4)$

Per tant:

$$cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|10 - 8 + 28|}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{138}} = \frac{30}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{138}} = 0{,}5573$$

$$90° - \alpha = arccos\ (0{,}5573) = 56° \quad \to \quad \alpha = 34°$$

b) El vector normal a p_1 és $\vec{n}_1 = (1, 1, 0)$ i el vector normal a p_2 és $\vec{n}_2 = (0, 1, -3)$. Així:

$$cos\,\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|0 + 1 + 0|}{\sqrt{1+1+0} \cdot \sqrt{1+9}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = 0{,}22 \quad \to \quad \alpha = 77°$$

2) Calcula la distància del punt P(1, –1, 2) a la recta següent:

$$r: \begin{cases} x = 2l \\ y = l \quad \forall l \in R \\ z = -l \end{cases}$$

(1 Punt)

<u>1r mètode: Aplicant la fórmula:</u>

La recta r bé donada per un punt A(0,0,0) i un $\vec{v}$ =(2,1,-1)

així doncs la d= $\dfrac{|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}|}{|\vec{V}|} = \dfrac{|(-1,5,3)|}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{1+25+9}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{210}}{6}\, u = 2{,}42u$

<u>2n mètode: Trobant la projecció perpendicular</u>

- Pla π que passa per P i és perpendicular a r:

  El seu vector normal és el vector direcció de la recta: $\vec{n} = (2, 1, -1)$. Passa per $P(1, -1, 2)$.

  La seva equació és: π: $2 \cdot (x - 1) + (y + 1) - (z - 2) = 0 \quad \to \quad \pi$: $2x + y - z + 1 = 0$
- Intersecció de π i r.

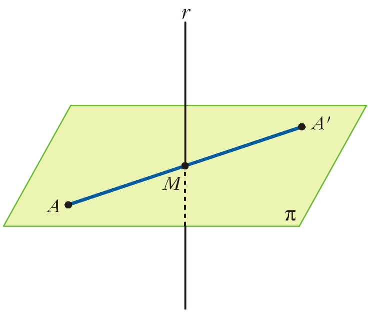
  Substituïm les coordenades d'un punt arbitrari de *r* (punt en paramètriques) en π:

$$2\cdot(2\lambda)+\lambda+\lambda+1=0 \;\rightarrow\; 6\lambda+1=0 \;\rightarrow\; \lambda=\frac{-1}{6} \;\rightarrow\; \begin{cases} x=\dfrac{-2}{6} \\ y=\dfrac{-1}{6} \\ z=\dfrac{1}{6} \end{cases} \;\rightarrow\; P'\left(\frac{-2}{6},\frac{-1}{6},\frac{1}{6}\right)$$

- Distància que ens demanen:

$$dist(P,r)=dist(P,P')=\sqrt{\left(1+\frac{2}{6}\right)^2+\left(-1+\frac{1}{6}\right)^2+\left(2-\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{210}}{6}=2{,}42$$

3) Determina el punt simètric de A(2, 1, 4) respecte de la recta $r:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$



Trobem el pla π que conté el punt A i és perpendicular a r:

$\vec{n}=\vec{d}_r=(3,2,-1)$

$3\cdot(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0 \quad\rightarrow\quad 3x+2y-z-4=0$

Busquem el punt de tall de r i π: $M(1, 0, -1)$

El punt A' és el simètric de A respecte de M:

$$\left(\frac{x+2}{2},\frac{y+1}{2},\frac{z+4}{2}\right)=(1,0,-1) \;\rightarrow\; x=0,\; y=-1,\; z=-6 \;\rightarrow\; A'(0,-1,-6)$$

(1,5 Punts)

4) Siguin les rectes:

$$r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2\lambda \\ z=-2 \end{cases}\;\forall\lambda\in\mathbb{R} \quad \text{i} \quad s:\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}.$$ Troba:

a) La posició relativa de les dues rectes r i s
b) La distància entre les rectes.
c) La recta perpendicular a r i s.

(3 Punts)

a) És clar que A(1,0,-2)∈ r $\vec{v_r}=(1,2,0)$, B(2,0,1) ∈ s $\vec{v_r}=(3,2,1)$ i ara calculant els rangs

Rang $(\vec{v_r},\vec{v_s})$=Rang $\begin{pmatrix}1&2&0\\3&2&1\end{pmatrix}$=2 i com det $(\vec{v_r},\vec{v_s},\overrightarrow{AB})=\begin{vmatrix}1&2&0\\3&2&1\\1&0&3\end{vmatrix}=-10$

aleshores Rang $(\vec{v_r},\vec{v_s},\overrightarrow{AB})$=Rang$\begin{pmatrix}1&2&0\\3&2&1\\1&0&3\end{pmatrix}$=3 per tant r i s es creuen.

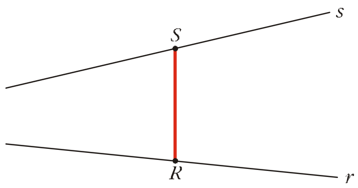
b)

1r mètode: Aplicant la fórmula

$$V=\frac{\left|\left[\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{AB}\right]\right|}{\left|\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s\right|}=\frac{10}{\left|(2,-1,-4)\right|}=\frac{10}{\sqrt{4+1+16}}=\frac{10\sqrt{21}}{21}\simeq 2{,}18\ u$$

2n mètode: Trobant els peus de la perpendicular comú:

R i S són els extrems del segment perpendicular a totes dues rectes.



Un punt genèric de r és $R(1+\lambda,\ 2\lambda,\ -2)$ i un punt genèric de s és $S(2+3\mu,\ 2\mu,\ 1+\mu)$.

Un vector genèric que tingui l'origen en r i l'extrem en S és:

$$\overrightarrow{RS}=(1+3\mu-\lambda,\ 2\mu-2\lambda,\ 3+\mu)$$

De tots els possibles vectors $\overrightarrow{RS}$, busquem aquell que sigui perpendicular a les dues rectes:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{RS}\cdot(1,2,0)=0\ \rightarrow\ 1+3\mu-\lambda+4\mu-4\lambda=0\\ \overrightarrow{RS}\cdot(3,2,1)=0\ \rightarrow\ 3+9\mu-3\lambda+4\mu-4\lambda+3+\mu=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}1-5\lambda+7\mu=0\\ 6-7\lambda+14\mu=0\end{array}\right\}$$

La solució és: $l=\frac{-4}{3}$, $m=\frac{-23}{21}$

Substituint a r i s obtenim els punts R i S.

$$\left.\begin{array}{l}R\left(\frac{-1}{3},\frac{-8}{3},-2\right)\\ S\left(\frac{-9}{7},\frac{-46}{21},\frac{-2}{21}\right)\end{array}\right\}\ dist(r,s)=dist(R,S)=\sqrt{\left(\frac{-20}{21}\right)^2+\left(\frac{10}{21}\right)^2+\left(\frac{40}{21}\right)^2}=\frac{\sqrt{2100}}{21}=2{,}18$$

c)

1r mètode: sense trobar els peus de la perpendicular comú

Si aquesta recta és t sabem que podem agafar com vector director el $\vec{v}_t=\vec{v}_r\wedge\vec{v}_s=(2,-1,-4)$

I aleshores només ens falta un punt per on passa t.

Sigui P(x,y,z) $\in$ t aleshores només cal que imposem que

- t talla a r==> det $(\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_t},\overrightarrow{AP}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \\ x-1 & y & z+2 \end{vmatrix} = 0$ ===> – 8 X + 4 Y – 5 Z – 2 = 0
- t talla a s det $(\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{v_t},\overrightarrow{BP}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ x-2 & y & z-1 \end{vmatrix} = 0$ ===> –7 X + 14 Y – 7 Z + 21 = 0

Conclusió la recta t és la recta donada per les equacions:
–8 X + 4 Y – 5 Z – 2 = 0
–X + 2 Y – Z + 3 = 0

<u>2n mètode: Si hem calculat els peus de la perpendicular comuna</u>

La recta perpendicular a *r* i *s*, és la recta que passa per *R* i *S*.

$\overrightarrow{RS} = \left(\frac{-20}{21}, \frac{10}{21}, \frac{40}{21}\right)$

La recta que busquem és: $\begin{cases} x = \frac{-1}{3} - \frac{20}{21} l \\ y = \frac{-8}{3} + \frac{10}{21} l \\ z = -2 + \frac{40}{21} l \end{cases}$

5) Considera els punts P(2, 1, 1) i Q(4, 5, 3).

a) Obtén l'equació del pla π que passa pel punt mig del segment $\overline{PQ}$ i és perpendicular a aquest segment.

b) Calcula el volum del tetràedre limitat pels eixos de coordenades i el pla π.

(1,5 Punts)

a) Trobem el punt mig de $\overline{PQ} \rightarrow M(3, 3, 2)$.

El vector normal al pla és $\overrightarrow{PQ} = (2, 4, 2)$, així:

π: $2(x - 3) + 4(y - 3) + 2(z - 2) = 0 \quad \rightarrow \quad \pi$: $2x + 4y + 2z - 22 = 0 \quad \rightarrow$

$\rightarrow \quad \pi$: $x + 2y + z - 11 = 0$

b) Punts de tall amb els eixos:

Si $y = 0,\ z = 0 \ \rightarrow \ x = 11 \ \rightarrow \ A(11, 0, 0)$

Si $x = 0,\ z = 0 \ \rightarrow \ y = \frac{11}{2} \ \rightarrow \ B\left(0, \frac{11}{2}, 0\right)$

Si $x = 0,\ y = 0 \ \rightarrow \ z = 11 \ \rightarrow \ C(0, 0, 11)$

$D(0, 0, 0)$

I doncs els vectors que determinen el tetraedre són

$\overrightarrow{DA}(11, 0, 0)$ $\overrightarrow{DB}\left(0, \frac{11}{2}, 0\right)$ $\overrightarrow{DC}(0, 0, 11)$

$$\text{Volum de } ABCD = \frac{1}{6}\left|\left[\ \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\ \right]\right| = \frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1\,331}{2} =$$

$$= \frac{1331}{12} \simeq 110{,}92 \quad \text{u}^3$$

6) Troba el lloc geomètric dels punts de l'espai, P, tal que la suma de quadrats de les distàncies als punts A(−4, 0, 0) i B(4, 0, 0) és 40. Identifica la figura resultant.

(1,5 Punts)

Si $P(x, y, z)$ és un punt del lloc geomètric, cal que:

$$\left[dist\,(P, A)\right]^2 + \left[dist\,(P, B)\right]^2 = 40$$

És a dir:

$$(x+4)^2 + y^2 + z^2 + (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 40$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + z^2 + x^2 - 8x + 16 + y^2 + z^2 = 40$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

És una esfera de centre (0, 0, 0) i radi 2.