Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
Institut d'Educació Secundària
Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
2n BATX MA
Geometria

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Donat el pla π: **a**x – 6y + 4z = 5 i la recta $r:\begin{cases} 5x - y + z = 0 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$

a) Calculeu el valor de "a" per al qual r és paral·lela al pla π
b) Calculeu el valor de "a" per al qual r és perpendicular al pla π
c) Per a=1 calculeu l'angle que formen aquesta recta i aquest pla.

(2,5 punts)

2) Siguin les rectes:

$\boldsymbol{r}:\begin{cases} \mathbf{2x - y = 2} \\ \mathbf{z = -2} \end{cases}$ ***i*** $\boldsymbol{s}:\begin{cases} \mathbf{x = 2 + 3}l \\ \mathbf{y = 2}l \\ \mathbf{z = 1} + l \end{cases}$ " l Î ***R*** . Trobeu:

a) Expresseu la recta r en forma paramètrica. I doneu un parell de punts de la recta r i un vector director.
b) La posició relativa de les dues rectes r i s
c) La recta perpendicular a r i s que les talla (perpendicular comuna).

(0,75 + 0,75+ 1 =2,5 punts)

3) Considereu el paral·lelogram ABCD. Sabent que B(5, –1, 1) i C(–2, 3, 1) i D(–4,4,2).
a) Obteniu el quart vèrtex i el centre del paral·lelogram.
b) Calculeu l'àrea del paral·lelogram i del triangle BCD.

(0,75+0,75=1,5 punts)

4) Donat el punt A(1, 0 ,1) i la recta $r: x - 3 = y + 3 = \dfrac{z-5}{3}$ anem a trobar el punt simètric de A respecte r que anomenarem A'.
Seguiu els passos següents
a) Trobeu el pla p que passa per A i que és perpendicular a r
b) Trobeu la intersecció d'aquest pla p amb la recta r (aquest punt és la projecció ortogonal de A sobre la recta r)
c) Trobeu el punt A', és a dir el simètric del punt A respecte la recta r

(0,75+0,75+0,5=2 punts)

5)
a) Escriu l'equació del pla π determinat pel punts A(0,2,–2), B(3,2,1) i C(2,3,2)
b) Calcula el volum del tetràedre limitat pels eixos de coordenades i el pla π.

(0,5+1=1,5 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Donat el pla π: **a**x – 6y + 4z = 5 i la recta $r:\begin{cases} 5x-y+z=0 \\ x-y-z=4 \end{cases}$

a) Calculeu el valor de "a" per al qual r és paral·lela al pla π
b) Calculeu el valor de "a" per al qual r és perpendicular al pla π
c) Per a=1 calculeu l'angle que formen aquesta recta i aquest pla.

(2,5 punts)

a) Un vector normal al pla π és $v_{\perp p}$ =(a,–6,4) i un vector director de la recta r pot ser

$$(5,-1,1)\wedge(1,-1,-1)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=(2,6,-4)$$ o un múltiple seu per exemple el

$\vec{v}_r$ =(1,3,–2)

Ara només cal imposar que $v_{\perp p}$ =(a,–6,4) i v_r =(1,3,–2) són perpendiculars.
Per tant com cap dels dos és nul tenim que $v_{\perp p}\cdot\perp v_r \Leftrightarrow v_{\perp p}\cdot v_r=0 \Leftrightarrow$
$v_{\perp p}\cdot v_r$ =(a,–6,4)·(1,3,–2)= a–18–8=0 $\Leftrightarrow$ **a = 26**

b) Ara per tal que siguin perpendiculars només cal que els vectors $v_{\perp p}$ i v_r siguin Linealment Dependents $\Leftrightarrow \frac{a}{1}=\frac{-6}{3}=\frac{4}{-2} \Leftrightarrow$ **a = –2**

c) Si l'angle és a tenim que

$$\cos(90^o-a)=\frac{|v_{\perp p}\cdot v_r|}{|v_{\perp p}||v_r|}=\frac{|1-18-8|}{\sqrt{1+36+16}\cdot\sqrt{1+9+4}}=\frac{25}{\sqrt{53}\cdot\sqrt{14}}=0{,}9177788728$$

90º- a =23,3965º $\Rightarrow a$ =66,6035º

2) Siguin les rectes:

$r:\begin{cases} 2x-y=2 \\ z=-2 \end{cases}$ i $s:\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=2\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}\ \forall\lambda\in R$. Trobeu:

a) Expresseu la recta r en forma paramètrica. I doneu un parell de punts de la recta r i un vector director.
b) La posició relativa de les dues rectes r i s
c) La recta perpendicular a r i s que les talla (perpendicular comuna).

(0,75 + 0,75+ 1 =2,5 punts)

a) Es pot agafar com a paràmetre la incògnita x i així les equacions paramètriques de la recta (que és la solució del sistema) són: $r:\begin{cases} x=m \\ y=-2+2m \\ z=-2 \end{cases}\quad \forall m\in R$

Aleshores és clar que els punts poden ser P(0,–2,–2)$\in$ r ($m=0$) i A(1,0,–2)$\in$ r ($m=1$) i un vector director pot ser el $\vec{v_r}=(1,2,0)$,

b) Considerem

- de la recta r el punt A(1,0,–2) $\in$ r i el $\vec{v_r}=(1,2,0)$
- de la recta s que B(2,0,1) $\in$ s $\vec{v_s}=(3,2,1)$

i ara calculant els rangs

Rang ($\vec{v_r},\vec{v_s}$)=Rang $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$= 2 i com det ($\vec{v_r},\vec{v_s},\vec{AB}$) = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ = –10

aleshores Rang ($\vec{v_r},\vec{v_s},\vec{AB}$)=Rang $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$=3 per tant r i s es creuen.

c)

<u>1r mètode: sense trobar els peus de la perpendicular comú</u>

Si aquesta recta és **t** sabem que podem agafar com vector director el

$\vec{v_t}=\vec{v_r}\wedge\vec{v_s}=(2,-1,-4)$

I aleshores només ens falta un punt per on passa t.

Sigui P(x,y,z) $\in$ t aleshores només cal que imposem que

- t talla a r $\Rightarrow$ det ($\vec{v_r},\vec{v_t},\vec{AP}$)=$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \\ x-1 & y & z+2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$ – 8 X + 4 Y – 5 Z – 2 = 0
- t talla a s $\Rightarrow$ det ($\vec{v_s},\vec{v_t},\vec{BP}$)=$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ x-2 & y & z-1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$ –7 X + 14 Y – 7 Z + 21 = 0

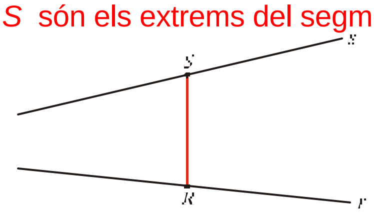
Conclusió la recta t és la recta donada per les equacions:

–8 X + 4 Y – 5 Z – 2 = 0

–X + 2 Y – Z + 3 = 0

<u>2n mètode: Si hem calculat els peus de la perpendicular comuna</u>

R i *S* són els extrems del segment perpendicular a totes dues rectes.



Un punt genèric de *r* és $R(1+\lambda, 2\lambda, -2)$ i un punt genèric de *s* és $S(2+3\mu, 2\mu, 1+\mu)$.

Un vector genèric que tingui l'origen en r i l'extrem en s és:

$$\overrightarrow{RS} = (1+3\mu-\lambda,\ 2\mu-2\lambda,\ 3+\mu)$$

De tots els possibles vectors $\overrightarrow{RS}$, busquem aquell que sigui perpendicular a les dues rectes:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RS}\cdot(1,2,0)=0 \rightarrow 1+3\mu-\lambda+4\mu-4\lambda=0 \\ \overrightarrow{RS}\cdot(3,2,1)=0 \rightarrow 3+9\mu-3\lambda+4\mu-4\lambda+3+\mu=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 1-5\lambda+7\mu=0 \\ 6-7\lambda+14\mu=0 \end{array}\right\}$$

La solució és: $l=\frac{-4}{3}$, $m=\frac{-23}{21}$

Substituint a r i s obtenim els punts R i S.

$$\left.\begin{array}{l} R\left(\frac{-1}{3}, \frac{-8}{3}, -2\right) \\ S\left(\frac{-9}{7}, \frac{-46}{21}, \frac{-2}{21}\right) \end{array}\right]$$

Així doncs la recta perpendicular a r i s, és la recta que passa per R i S.

$$\overrightarrow{RS} = \left(\frac{-20}{21}, \frac{10}{21}, \frac{40}{21}\right)$$

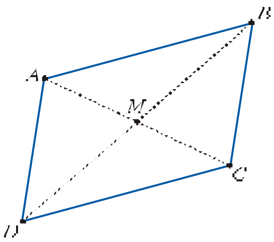
La recta que busquem és: $\begin{cases} x=\frac{-1}{3}-\frac{20}{21}l \\ y=\frac{-8}{3}+\frac{10}{21}l \\ z=-2+\frac{40}{21}l \end{cases}$

3) Considereu el paral·lelogram ABCD. Sabent que $B(5,-1,1)$ i $C(-2,3,1)$ i D(–4,4,2).

a) Obteniu el quart vèrtex i el centre del paral·lelogram.

b) Calculeu l'àrea del paral·lelogram i del triangle BCD.

(0,75+0,75=1,5 punts)



a)

Com que es tracta d'un paral·lelogram, tenim que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Si $A(x, y, z)$:

(5–x, –1–y, 1 –z) = (2, –1, –1) d'on: 5–x = 2, –1–y =–1, 1–z =–1 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ x= 3, y=0 i z=2 $\Rightarrow A(3,0,2)$

El centre del paral·lelogram és el punt mitjà d'una de les dues diagonals, així:

$$M=\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

b) Àrea del paral·lelogram=

$$=\left|\vec{CB}\wedge\vec{CD}\right| = \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{matrix}\right\| = |(-4,-7,-1)| = \sqrt{16+49+1} = \sqrt{66}\ u^2$$

Àrea del triangle BCD = $\dfrac{\left|\vec{CB} \wedge \vec{CD}\right|}{2} = \dfrac{\sqrt{66}}{2} u^2$

4) Donat el punt A(1, 0 ,1) i la recta $r: x-3 = y+3 = \dfrac{z-5}{3}$ anem a trobar el punt simètric de A respecte r que anomenarem A'.

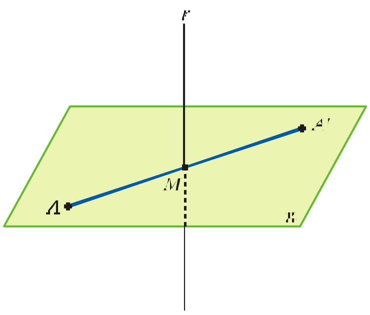
Seguiu els passos següents

a) Trobeu el pla p que passa per A i que és perpendicular a r

b) Trobeu la intersecció d'aquest pla p amb la recta r (aquest punt és la projecció ortogonal de A sobre la recta r)

c) Trobeu el punt A', és a dir el simètric del punt A respecte la recta r

(0,75+0,75+0,5=2 punts)



Trobem el pla π que conté el punt *A* i és perpendicular a *r* :

$\vec{n}_p = \vec{v}_r = (1, 1, 3)$

1 · (x – 1) + 1 ·(y – 0) + 3·(z – 1) = 0 $\Rightarrow$ x + y +3 z – 4 = 0

Busquem el punt de tall de *r* i π:

Un punt arbitrari de la recta r és $P_l = (3+l, -3+l, 5+3l)$

imposem que aquest punt verifica l'equació de π i tenim que:

$$3+l-3+l+15+9l-4=0 \Rightarrow 11l=-11 \Rightarrow l=-1$$

M (2, –4 , 2)

El punt *A'* (x,y,z) és el simètric de *A* respecte de *M*, per tant M és el punt mig del segment A'A

$$\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z+1}{2}\right) = (2, -4, 2) \Rightarrow x=3, \quad y=-8, \quad z=3 \quad \rightarrow \quad A'(3,-8,3)$$

5)

a) Escriu l'equació del pla π determinat pel punts A(0,2,–2), B(3,2,1) i C(2,3,2)

b) Calcula el volum del tetràedre limitat pels eixos de coordenades i el pla π.

(0,5+1=1,5 punts)

a) El pla determinat per A,B,C= $p(A,B,C) = p(A; \vec{AB}; \vec{AC})$ sempre que els dos vectors siguin Linealment Independents

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3,2,1) - (0,2,-2) = (3,0,3)$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (2,3,2) - (0,2,-2) = (2,1,4)$ que ho són ja que no són proporcionals.

Així doncs l'equació del pla $\pi = p(A,B,C) = p(A; \vec{AB}; \vec{AC})$ és

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 2 \\ y-2 & 0 & 1 \\ z+2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$ 3(z+2)+6 (y–2)–3x–12 (y–2)=0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 3z +6 +6y –12 –3x –12 y +24=0 $\Rightarrow$ –3x –6y +3z = –18 $\Rightarrow$ **– x –2y +z = –6**

b) Ara hem de tallar aquest pla amb els eixos coordenats.

{Eix OX } $\cap p$ = {y=0; z=0; – x –2y +z = –6} = el punt P(6,0,0)
{Eix OY } $\cap p$ = {x=0; z=0; – x –2y +z = –6} = el punt Q(0,3,0)
{Eix OZ } $\cap p$ = {x=0; y=0; – x –2y +z = –6} = el punt R(0,0,–6)

Així doncs el tetràedre del qual hem de trobar el volum és el determinat pels vèrtexs O(0,0,0), P(10,0,0), Q(0,–5,0) i R(0,0,10)

Així doncs V= $\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR}\right)\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{matrix}\right\| = \frac{1\cdot\left|-108\right|}{6} = 18\,u^3$