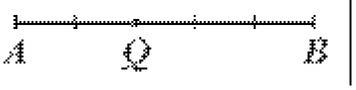
Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
Institut Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
2n BATX MA
Geometria afí

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Sabem que A(–4, 3, 3) i B(6, 3, –2). Calcula:
   a) El punt mig del segment $\overline{AB}$.
   b) El punt simètric del punt B respecte de A.
   c) El punt Q que verifica que



(1,5 punts)

2) Donats els punts A(1, 3, –2), B(–5, 4, 1) i C(7, 2, 4):
   a) Determina la recta r que passa per A i B.
   b) Troba m i n per tal que P(3, m, n) pertanyi a r.
   c) Determina l'equació del pla p que passa per A, B i C.
   d) Troba k per tal que Q(k, 7, –1) pertanyi a p .

(2 punts)

3) Calcula l'equació del pla que determinen el punt A(1,0,1) i la recta

$$r:\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+2z=0 \end{cases}$$

(2 punts)

4)
   a) Trobeu els valors de m i n per tal que els plans següents siguin paral·lels:
   a **:** $\mathbf{2x - y + z - 5 = 0}$ **i** b **:** $\mathbf{4x + n\,y + 2\,m\,z + 3 = 0}$
   b) Trobeu l'equació d'un pla paral·lel a a que passi pel punt A(0, –5, 8).

(1,5 punts)

5)
   a) Discutiu la posició relativa d'aquestes dues rectes de l'espai, depenent del paràmetre k

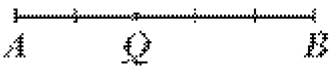
$$r:\frac{x-17}{7}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-8}{2} \quad \text{i} \quad s:\begin{cases} x=15+4l \\ y=-2-l \\ z=19+k\,l \end{cases} \quad \forall l \in R$$

   b) Si en algun cas es tallen un únic punt, trobeu-lo.

(3 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Sabem que A(–4, 3, 3) i B(6, 3, –2). Calcula:
   a) El punt mig del segment $\overline{AB}$.
   b) El punt simètric del punt B respecte de A.
   c) El punt Q que verifica que



(1,5 punts)

a) M és el punt mig de AB, així doncs: $M=\left(\frac{-4+6}{2},\frac{3+3}{3},\frac{3-2}{2}\right)=\left(1,3,\frac{1}{2}\right)$

b) Si anomenem C(x, y , z) al punt que busquem tenim que A és el punt mig de BC

$$(-4,3,3)=\left(\frac{6+x}{2},\frac{3+y}{2},\frac{-2+z}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}6+x=-8\\3+y=6\\-2+z=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-14\\y=3\\z=8\end{cases}\Rightarrow$$ **C(–14, 3,8)**

c) $\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ i si Q (x, y, z) tenim que:

$$(x+4,y-3,z-3)=\frac{2}{5}(10,0,-5)\Rightarrow(x+4,y-3,z-3)=(4,0,-2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+4=4\\y-3=0\\z-3=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=3\\z=1\end{cases}$$

Així doncs Q(0, 3, 1)

2) Donats els punts A(1, 3, –2), B(–5, 4, 1) i C(7, 2, 4):
   a) Determina la recta r que passa per A i B.
   b) Troba m i n per tal que P(3, m, n) pertanyi a r.
   c) Determina l'equació del pla P que passa per A, B i C.
   d) Troba k per tal que Q(k, 7, –1) pertanyi a P.

(2 punts)

a) Com A i B són diferents podem obtenir la r = Recta (A,B) = Recta (A, $\overrightarrow{AB}$)

Així doncs la seves equacions contínues són

$$\frac{x-1}{-6}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+2}{3}$$

b) Només cal que imposem que els vectors $\overrightarrow{AB}$=(–6, 1, 3) i $\overrightarrow{AP}$=(2, m – 3 , n+2) són Linealment dependents (LD), és a dir que són proporcionals:

$$\frac{2}{-6}=\frac{m-3}{1}=\frac{n+2}{3}\Rightarrow\begin{cases}\frac{-1}{3}=m-3\Rightarrow m=3-\frac{1}{3}\Rightarrow m=\frac{8}{3}\\\frac{-1}{3}\cdot3=n+2\Rightarrow-1=n+2\Rightarrow n=-3\end{cases}$$

Per tant els valors buscats són m = 8/3 i n = –3 i P(3, 8/3, –3)

c) Considerem el pla determinat pel punt A i els vectors directors $\overrightarrow{AB}$ =(–6, 1, 3) i $\overrightarrow{AC}$ =(6, –1, 6) que són Linealment Independents

ja que no es verifica $\left(\frac{-6}{6}=\frac{1}{-1}=\frac{3}{6}\right)$

Per tant podem donar l'equació del pla en forma contínua com:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -6 & 6 \\ y-3 & 1 & -1 \\ z+2 & 3 & 6 \end{vmatrix}=0 \overset{c3+c2}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix} x-1 & -6 & 0 \\ y-3 & 1 & 0 \\ z+2 & 3 & 9 \end{vmatrix}=0 \overset{Desenper C3}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 9[(x-1)+6(y-3)]=0 \Leftrightarrow x-1+6y-18=0 \Leftrightarrow x+6y=19$$

d) I ara només cal imposar que el punt **Q(k, 7, –1)** verifiqui l'equació del pla, la qual cosa és equivalent de imposar que el determinant ($\overrightarrow{AQ}$ **,** $\overrightarrow{AB}$ **,** $\overrightarrow{AC}$)=0

k + 6 · 7 = 19 ⇔ k= 19 – 42 ⇔ **K = – 23**

3) Calcula l'equació del pla que determinen el punt A(1,0,1) i la recta

$$r:\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+2z=0 \end{cases}$$

(2 punts)

Primer de tot hem de calcular un punt i un vector director de la recta r. Per fer-ho solucionem el sistema SCI amb un grau de llibertat

Agafem com incògnita lliure la z i així tenim:

$$r:\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-1+l \\ 2x-y=-2l \quad \forall l\in R \\ z=l \end{cases} \overset{f1+f2}{\Rightarrow} \begin{cases} 3x=-1-l \\ 2x-y=-2l \quad \forall l\in R \\ z=l \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-1-l}{3} \\ y=2l+2x \quad \forall l\in R \\ z=l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-1}{3}-\frac{1}{3}l \\ y=\frac{-2}{3}+\frac{4}{3}l \quad \forall l\in R \\ z=l \end{cases}$$

Per tant podem agafar com a punts: $R_{l=0}\left(\frac{-1}{3},\frac{-2}{3},0\right)$ O $R_{l=2}(-1,\ 2,\ 2)$. Sigui R(–1, 2, 2)

i com a vectors directors $\vec{v}=\left(\frac{-1}{3},\frac{4}{3},1\right)$ o $\vec{w}=3\vec{v}=(-1,4,3)$

$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OA}=(-2,2,1)$

Substituint a les equacions de r es veu clarament que A∉ r tenim que el pla demanat és $p=p\left(A;\vec{w},\overrightarrow{AR}\right)$ i l'equació contínua és:

$$p:\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -2 \\ y & 4 & 2 \\ z-1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x-5y+6z-4=0$$

4)

a) Trobeu els valors de m i n per tal que els plans següents siguin paral·lels:

α : **2x - y + z - 5 = 0** i β : **4x + ny + 2 m z + 3 = 0**

b) Trobeu l'equació d'un pla paral·lel a α que passi pel punt A(0, –5, 8).

(1,5 punts)

a) Farem el raonament amb els coeficients de les equacions. Cal que el sistema resultant sigui S.I per tant:

$$\frac{4}{2}=\frac{n}{-1}=\frac{2m}{1}\neq\frac{3}{-5}\Rightarrow\begin{cases} n=-2 \\ m=1 \end{cases}$$

b) És un pla d'equació **2x –y + z + D = 0** on només cal determinar el terme independent.

Imposant que A sigui del pla tenim que:

5 +8 + D = 0 $\Rightarrow$ **D = –13**

Així doncs el pla buscat és 2x –y + z – 13 = 0

5)

a) Discutiu la posició relativa d'aquestes dues rectes de l'espai, depenent del paràmetre k

$$r:\frac{x-17}{7}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-8}{2} \quad \text{i} \quad s:\begin{cases} x=15+4\lambda \\ y=-2-\lambda \\ z=19+k\lambda \end{cases} \quad \forall\lambda\in R$$

b) Si en algun cas es tallen un únic punt, trobeu-lo.

(3 punts)

a)

Com les recta R està donada en forma contínua i la s en equacions paramètriques és molt fàcil donar punts i vector directors de cadascuna d'elles:

r: Punt R(17, 1, 8) i un vector director és el $\vec{v}$ =(7, 0, 2)

s: Punt S(15, –2, 19) i un vector director és el $\vec{w}$ =(4, –1, k)

Rang ($\vec{v}$, $\vec{w}$)= 2 ja que els vectors no són proporcionals ja que $\frac{7}{5}\neq\frac{0}{-1}$ per tant saben que les dues rectes tenen direccions diferents. I ara per veure si es tallen o es creuen cal estudiar

Rang ($\vec{v}$, $\vec{w}$, $\overrightarrow{RS}$)

Com sabem que $\vec{v}$, $\vec{w}$ són L.I. només cal veure si el Rang és 3 o no és a dir serà suficient estudiar si el Determinant ($\vec{v}$, $\vec{w}$, $\overrightarrow{RS}$) és zero o no. Així dons, com $\overrightarrow{RS}$ = (–2, –3, 11) , Determinant $(\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{RS}) = \begin{vmatrix} 7 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & k & 11 \end{vmatrix}$ = – 77 – 24 +0 – 4 – 0 + 21 k =21 k –105

Així doncs Determinant $(\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{RS}) = 0 \Leftrightarrow$ K=5.
I per tant podem contestar que:

I) Si $k \neq 5$ les dues rectes es creuen
II) Si k=5 les dues rectes es tallen en un únic punt

b)
Ara hem de trobar el punt de tall de les dues rectes quan k=5.

Agafem un punt genèric de la recta s (que ja la tenim en paramètriques) i imposarem que verifiqui les equacions de r obtenint així el valor del paràmetre l

$$S_l = (15+4l, -2-l, 19+5l)$$

$$\frac{15+4l-17}{7} = \frac{-2-l-1}{0} = \frac{19+5l-8}{2} \Rightarrow \begin{cases} -3-l=0 \\ \dfrac{4l-2}{7} = \dfrac{11+5l}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l=-3 \\ 8l-4=77+35l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l=-3 \\ l=-3 \end{cases}$$

Per tant el punt de tall és el $S_{-3} = (15+4(-3), -2-(-3), 19+5(-3)) = (3,1,4)$