Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
Institut Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
2n BATX MA
Geometria mètrica

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Donades les rectes r i s següents:

$$r\begin{cases} x = 11 + 4l \\ y = 5 + 2l \\ z = 7 + 3l \end{cases} \forall\, l \in R \quad i \quad s\begin{cases} x = 11 - 9m \\ y = 5 - 5m \\ z = 7 - 7m \end{cases} \forall\, m \in R$$

a) Discutiu la posició relativa de cadascuna d'aquestes rectes r i s amb el pla p : 2x – 5y + 3z – 4 = 0
b) Trobeu el punt d'intersecció de cadascuna d'aquestes rectes r i s amb el pla p . A quina distància estan aquests punts entre sí?
c) Discutiu la posició relativa d'aquestes dues rectes i troba l'angle de r amb s.
d) Troba l'angle de s amb p .

(0,5+0,75+0,5+0,5=2,25 punts)

2) Donats els plans a : 2x + 5y – 7z + 4 = 0 b : 5x – y + z – 4 = 0
g : 2x + 5y – 7z + 49 = 0
a) Quina és la posició relativa entre a i b ? Calcula la distància entre a i b .
b) Quina és la posició relativa entre a i g ? Calcula la distància entre a i g .
c) Calcula l'angle que determinen a i b

(0,5 + 0,75·2 = 2 punts)

3)
a) Troba la distància de P(7, – 2, 1) a la recta: r: $\frac{x-2}{5} = \frac{4-2y}{2} = \frac{z+1}{3}$
b) Troba la projecció ortogonal del punt P sobre la recta r (és a dir el peu de la recta perpendicular que passa per P i és perpendicular a r)

(2+1 = 3 punts)

4)
a) Troba l'àrea del triangle determinat pels punts de tall del pla p : 3x + y + 2z – 6 = 0 amb els tres eixos coordenats.
b) Troba el volum de la piràmide determinada per aquests tres mateixos punts i l'origen de coordenades.

(1+1 = 2 punts)

5) Troba el centre i el radi de l'esfera: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 20 = 0$

(0,75 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Donades les rectes r i s següents:

$$r\begin{cases} x = 11+4l \\ y = 5+2l \quad \forall\, l \in R \\ z = 7+3l \end{cases} \quad i \quad s\begin{cases} x = 11-9m \\ y = 5-5m \quad \forall\, m \in R \\ z = 7-7m \end{cases}$$

a) Discutiu la posició relativa de cadascuna d'aquestes rectes r i s amb el pla p : 2x – 5y + 3z – 4 = 0
b) Trobeu el punt d'intersecció de cadascuna d'aquestes rectes r i s amb el pla p . A quina distància estan aquests punts entre sí?
c) Discutiu la posició relativa d'aquestes dues rectes i troba l'angle de r amb s.
d) Troba l'angle de s amb p .

(0,5+0,75+0,5+0,5=2,25 punts)

a i b)

En primer lloc veiem que r_1 i r_2 es tallen amb π, és a dir, que no són perpendiculars al vector normal π.

$$(4, 2, 3) \cdot (2, -5, 3) = 7 \neq 0 \;\Rightarrow\; r_1 \text{ talla } \pi$$

$$(-9, -5, -7) \cdot (2, -5, 3) = -14 \neq 0 \;\Rightarrow\; r_2 \text{ talla } \pi$$

Ara trobem els punts de tall de r_1 i r_2 amb π. Per fer-ho, substituïm en cada punt les coordenades del punt genèric de la recta en l'equació del pla:

- r_1 amb π:

$$2(11 + 4\lambda) - 5(5 + 2\lambda) + 3(7 + 3\lambda) - 4 = 0$$

Si fem l'operació obtenim $\lambda = -2$. Per tant, el punt de tall és $P(3, 1, 1)$.

- r_2 amb π:

$$2(11 - 9\lambda) - 5(5 - 5\lambda) + 3(7 - 7\lambda) - 4 = 0$$

Si fem l'operació obtenim $\lambda = 1$. Per tant, el punt de tall és $Q(2, 0, 0)$.

La distància entre tots dos punts és:

$$dist\,(P, Q) = \sqrt{(3-2)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}$$

c)

Les rectes r_1 i r_2 es tallen, òbviament, en el punt (11, 5, 7). Vegem-ne l'angle:

$$cos\,(\widehat{r_1, r_2}) = \frac{|4 \cdot (-9) + 2 \cdot (-5) + 3 \cdot (-7)|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{9^2 + 5^2 + 7^2}} = \frac{67}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{155}} = 0{,}99933237$$

$$\widehat{r_1, r_2} = 2^\circ\ 5'\ 38''$$

d)

$$\sin(a) = \frac{|\vec{v_s} \cdot \vec{v_{\perp p}}|}{|\vec{v_s}| \cdot |\vec{v_{\perp p}}|} = \frac{|(-9,-5,-7)\cdot(2,-5,3)|}{|(-9,-5,-7)|\cdot|(2,-5,3)|} = \frac{|-18+25-21|}{\sqrt{81+25+49}\sqrt{4+25+9}} =$$

$$= \frac{14}{\sqrt{155}\sqrt{38}} \Rightarrow a = \arcsin\left(\frac{14}{\sqrt{155}\sqrt{38}}\right) = \arcsin(0{,}182419133) = 10{,}51^{\circ}$$

2) Donats els plans a : 2x + 5y – 7z + 4 = 0 b : 5x – y + z – 4 = 0

g : 2x + 5y – 7z + 49 = 0

a) Quina és la posició relativa entre a i b? Calcula la distància entre a i b.

b) Quina és la posició relativa entre a i g? Calcula la distància entre a i g.

c) Calcula l'angle que determinen a i b

(0,5 + 0,75·2 =2 punts)

a) Els plans a i b es tallen, perquè els seus coeficients no són proporcionals. Per tant, la distància entre a i b és zero.

b) Els plans a i g són paral·lels, ja que els seus coeficients són proporcionals. Per tant, la distància entre ells és la distància d'un punt qualsevol d'un dels plans a l'altre. P (–2, 0, 0) és un punt de a. Per tant:

$$dist(\alpha,\gamma) = dist(P,\gamma) = \frac{|2\cdot(-2)+5\cdot 0-7\cdot 0+49|}{\sqrt{2^2+5^2+7^2}} = \frac{45}{\sqrt{78}} = \frac{15\sqrt{78}}{26}$$

c) Hem de calcular l'angle que determinen els seus vectors perpendiculars:

$V_{\perp a} = (2,5,-7)$ **i** $V_{\perp b} = (5,-1,1)$ **així doncs**

angle (a , b)= angle ($V_{\perp a}$,$V_{\perp b}$)=f

$$\Rightarrow \cos(f) = \frac{|V_{\perp a}\cdot V_{\perp b}|}{|V_{\perp a}|\,|V_{\perp b}|} = \frac{|10-5-7|}{\sqrt{4+25+49}\,\sqrt{25+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{78}\sqrt{27}}$$

$$\Rightarrow f = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{78}\sqrt{27}}\right) = \arccos(.004358) = 87{,}50^{\circ}$$

3)

a) Troba la distància de P(7, – 2, 1) a la recta: r: $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{4-2y}{2} = \dfrac{z+1}{3}$

b) Troba la projecció ortogonal del punt P sobre la recta r (és a dir el peu de la recta perpendicular que passa per P i és perpendicular a r)

(2+1 = 3 punts)

a) Primer cal dividir per –2 numerador i denominador de la segona fracció de les equacions de r per tal que tinguem les equacions contínues:

r: $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{3}$ **i ara resulta fàcil determinar un punt i un vector director de r: Punt R(2, 2, – 1) i vector director $\vec{v_r}$ = (5, –1, 3)**

Per tant si calculem el vector $\overrightarrow{RP} = (5,-4,2)$ i operem tenim la distància buscada:

$$d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{RP}\wedge\vec{V_r}|}{|\vec{V_r}|} = \frac{\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & -4 & 2\\ 5 & -1 & 3\end{vmatrix}\right\|}{|(5,-1,3)|} = \frac{|(10,-5,15)|}{|(5,-1,3)|} = \frac{\sqrt{(10)^2+(-5)^2+15^2}}{\sqrt{5^2+(-1)^2+3^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{350}}{\sqrt{35}} = \sqrt{10}\,unitats$$

b) El punt buscat és cert punt de la recta r. Per tant agafem un punt genèric de la recta r que anomenem $R_l(2+5l, 2-l, -1+3l)$ i ara imposem que el vector $\overrightarrow{PR_l}$ sigui perpendicular a $\overrightarrow{v_r}$ = (5, –1, 3), per tant que el seu producte escalar sigui zero:

$$\overrightarrow{PR_l}\cdot\overrightarrow{v_r} = (-5+5l, 4-l, -2+3l)\cdot(5,-1,3) = -25+25l-4+l-6+9l = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 35l-35=0 \Leftrightarrow l=1$$

així doncs el punt buscat és el $R_{l=1}(2+5, 2-1, -1+3) = (7,1,2)$

4)

a) Troba l'àrea del triangle determinat pels punts de tall del pla p : 3x + y + 2z – 6 = 0 amb els tres eixos coordenats.

b) Troba el volum de la piràmide determinada per aquests tres mateixos punts i l'origen de coordenades.

(1+1 = 2 punts)

a) Trobem els punts de tall del pla amb els eixos coordenats:

- Eix X: $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

  $3x-6=0 \rightarrow x=2;\ P(2, 0, 0)$

- Eix Y: $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$

  $y-6=0 \rightarrow y=6;\ Q(0, 6, 0)$

- Eix Z: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

  $2z-6=0 \rightarrow z=3;\ R(0, 0, 3)$

L'àrea del triangle els vèrtexs del qual són P, Q i R és la meitat de l'àrea del paral·lelogram format pels vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$.

$$A_{\text{TRIANGLE}} = \frac{|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|}{2} = \frac{|(-2, 6, 0)\times(-2, 0, 3)|}{2} = \frac{|(18, 6, -12)|}{2} = \frac{\sqrt{18^2+6^2+12^2}}{2} = 3\sqrt{14}\ \text{u}^2$$

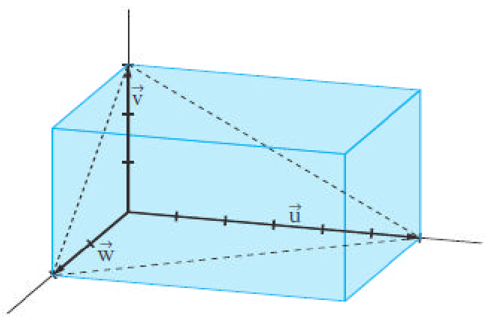
b) $V_{\text{TETRÀEDRE}} = \dfrac{\text{Àrea triangle}\cdot\text{altura}}{3}$

L'altura és la distància de l'origen de coordenades al pla.

$$\text{altura} = \frac{|-6|}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{14}}\ \text{u}$$

$$V_{\text{TETRÀEDRE}} = \frac{\cancel{3}\cancel{\sqrt{14}}\cdot\dfrac{6}{\cancel{\sqrt{14}}}}{\cancel{3}} = 6\text{u}^3$$

Una altra forma de resoldre-ho:



La piràmide és la sisena part de l'ortoedre les arestes del qual són 2, 3 i 6.

$$V = \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 3\cdot 6 = 6\ \text{u}^3$$

També és pot calcular amb el producte mixt.

$$V = \frac{\left|\left[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}\right]\right|}{6} = \frac{\left\|\begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}\right\|}{6} = \frac{|36|}{6} = \frac{36}{6} = 6 \ \textit{unitats}^3$$

5) Troba el centre i el radi de l'esfera: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z - 20 = 0$

Completem quadrats en l'equació de l'esfera:

$$(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 5^2$$

Per tant, el radi és 5 i el centre, $C(2, 0, -1)$.

(0.75 punts)