Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Enuncieu i demostreu la Regla de Barrow (2n teorema fonamental del càlcul integral).

(0,75 punts)

2) Calculeu les integrals següents:

   a) $\int \frac{2x^3-6x^2-x-2}{x^2(x-2)(x+1)}dx$

   b) $\int (x-1)\cdot e^x dx$

(2+1=3 punts)

3) Troba la funció f(x) per a la qual $f'(x)=\sin\left(\frac{x}{3}\right)$ i que passi pel punt (0,9)

(0,75 punts)

4) Calculeu l'àrea de la superfície tancada per les corbes $y=x^3-7x$ i $y=2x$

(2 punts)

5) Donades les corbes $\left.\begin{array}{l} y=x^2+3 \\ y=6x-6 \\ \text{Els eixos OX i OY} \end{array}\right\}$

   a) Dibuixeu el recinte limitat per aquestes corbes en el 1r quadrant

   b) Calculeu l'àrea d'aquest recinte.

   c) Calculeu el volum del cos de revolució que genera aquest recinte al girar al voltant de l'eix OX

(1+1,5+1=3,5 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Enuncieu i demostreu la Regla de Barrow (2n teorema fonamental del càlcul integral).

(0,75 punts)

2n Teorema Fonamental del càlcul integral (Regla de Barrow)

f(x) funció contínua en [a,b]
G(X) és una primitiva de f(x) $\Big\} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$

Demostració

Recordem el 1r Teorema fonamental del càlcul integral

Si f(x) és una funció contínua en [a,b]
definim la funció $A(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \forall x \in [a,b]$ $\Longrightarrow$ A(x) és derivable i A'(x) = f(x) $\forall x \in [a,b]$

Així doncs tenim dues primitives d'una mateixa funció:

A'(x)= f(x) i G'(x)= f(x) $\forall x \in [a,b]$

Per tant podem afirmar que només es diferencien en una constant:

A(X) = G(x) + K per cert $K \in R$

En aquesta igualtat fem x=a i podrem obtenir el valor de la constant K que falta:

A(a) = G(a) + K $\Rightarrow \int_a^a f(t)\,dt = G(a) + K \Rightarrow 0 = G(a) + K \Rightarrow -G(a) = K$

I substituint a la igualtat anterior tenim que:

A(X) = G(x) –G(a) $\forall x \in [a,b]$ i si ara en aquesta darrera igualtat donem a la x el valor b

$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$ Com volíem demostrar

2) Calculeu les integrals següents:

a) $\int \frac{2x^3 - 6x^2 - x - 2}{x^2(x-2)(x+1)}dx$

b) $\int (x-1) \cdot e^x dx$

(2+1=3 punts)

a) $\int \frac{2x^3 - 6x^2 - x - 2}{x^2(x-2)(x+1)}dx$

Com el grau del numerador és menor que el del denominador ja podem descompondre aquesta fracció en suma de fraccions.

Observi's que el denominador ja està factoritzat i que té una arrel doble (x=0) i dues simples (x=2 i x=–1). Així doncs:

$$\frac{2x^3 - 6x^2 - x - 2}{x^2(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+1}$$

$$\frac{2x^3 - 6x^2 - x - 2}{x^2(x-2)(x+1)} = \frac{Ax(x-2)(x+1) + B(x-2)(x+1) + Cx^2(x+1) + Dx^2(x-2)}{x^2(x-2)(x+1)}$$

I ara igualant numeradors tenim:

$$2x^3 - 6x^2 - x - 2 = Ax(x-2)(x+1) + B(x-2)(x+1) + Cx^2(x+1) + Dx^2(x-2)$$

Avaluant aquesta igualtat per certs valors de X podem descobrir les constants que ens falten

X=0 $\Rightarrow$ –2B = –2 $\Rightarrow$ **B = 1**

X=2 $\Rightarrow$ 16–24–2–2 = C 12 $\Rightarrow$ –12 = 12 C $\Rightarrow$ **C = –1**

X= –1 $\Rightarrow$ –2–6+1–2 = D (–3) $\Rightarrow$ –9 = –3 D $\Rightarrow$ **D = 3**

Per trobar l'altra l'equació us suggereixo dues possibilitats:

X=1 $\Rightarrow$ 2–6–1–2 = –2A –2 B + 2 C –D $\Rightarrow$ –7 = –2A –2 –2 –3 $\Rightarrow$ 0 = –2 A $\Rightarrow$ **A = 0**

Mirar quantes X^3 hi ha a cada membre $\Rightarrow$ 2 = A + C + D $\Rightarrow$ 2 = A –1 +3 $\Rightarrow$ **A = 0**

I per tant la integral inicial es descompon en aquestes quatre integrals immediates:

$$\int \frac{2x^3-6x^2-x-2}{x^2(x-2)(x+1)}dx = \int \frac{0}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{-1}{x-2}+\frac{3}{x+1}dx = \int \frac{1}{x^2}+\frac{-1}{x-2}+\frac{3}{x+1}dx =$$

$$= \int x^{-2}\,dx - \int \frac{1}{x-2}dx + 3\int \frac{1}{x+1}dx = -\frac{1}{x} - \ln|x-2| + 3\ln|x+1| + K =$$

$$= \frac{-1}{x} + \ln\left|\frac{(x+1)^3}{(x-2)}\right| + k \qquad \forall k \in R$$

b) $\int (x-1)\cdot e^x dx$

Aquesta integral s'ha de fer per parts:

$u = x-1 \Rightarrow u' = 1$

$v' = e^x \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x$

I per tant

$$\int (x-1)\cdot e^x dx = (x-1)\cdot e^x - \int e^x dx = (x-1)\cdot e^x - e^x + K = xe^x - e^x - e^x + K =$$

$$= (x-2)\cdot e^x + K \qquad \forall k \in R$$

3) Troba la funció f(x) per a la qual $f'(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$ i que passi pel punt (0,9)

(0,75 punts)

Només cal integral i calcular la constant d'integració

$$f(x) = \int \sin\left(\frac{x}{3}\right)dx = -3\int \frac{-1}{3}\sin\left(\frac{x}{3}\right)dx = -3\cos\left(\frac{x}{3}\right) + k \qquad \forall k \in R$$

I ara imposem que passi pel punt (0,9), és a dir que f(0)=9

$$f(0) = 9 \Rightarrow -3\cos\left(\frac{0}{3}\right) + k = 9 \Rightarrow -3\cdot 1 + k = 9 \Rightarrow k = 12$$

Així doncs la funció buscada és $f(x) = -3\cos\left(\frac{x}{3}\right) + 12$

4) Calculeu l'àrea de la superfície tancada per les corbes $y = x^3 - 7x$ i $y = 2x$

(2 punts)

Les dues corbes són contínues. Per tant només cal que trobem els punts on es tallen i ja podrem saber on és la zona que tanquen aquestes corbes:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 7x \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = x^3 - 7x \Rightarrow 0 = x^3 - 9x \Rightarrow 0 = x(x^2-9) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = x(x+3)(x-3) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Així doncs:

$$A=\left|\int_{-3}^{0} x^3-7x-2x\,dx\right|+\left|\int_{0}^{3} x^3-7x-2x\,dx\right|=\left|\int_{-3}^{0} x^3-9x\,dx\right|+\left|\int_{0}^{3} x^3-9x\,dx\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{x^4}{4}-9\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-9\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{3}\right|=\left|0-\left(\frac{81}{4}-\frac{81}{2}\right)\right|+\left|\left(\frac{81}{4}-\frac{81}{2}\right)-0\right|=\left|\frac{81}{4}\right|+\left|\frac{-81}{4}\right|=\frac{81}{2}u^2$$

5) Donades les corbes $\left.\begin{array}{l} y=x^2+3 \\ y=6x-6 \\ \text{Els eixos OX i OY} \end{array}\right\}$

a) Dibuixeu el recinte limitat per aquestes corbes en el 1r quadrant
El dibuix és fàcil és una paràbola, i tres rectes (y=6x–6; Y=0 i X=0)
A més els punts de tall són fàcilment calculables

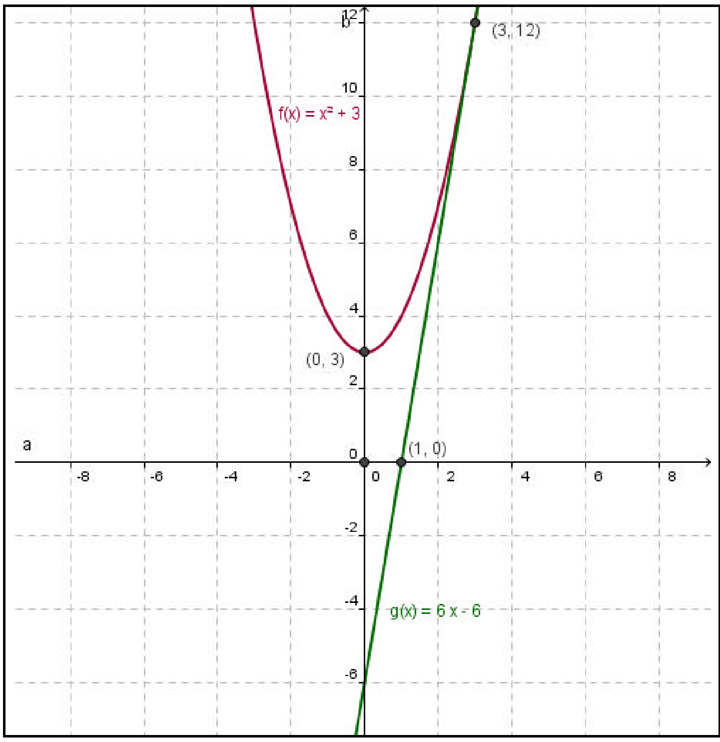
$$\left.\begin{array}{l} y=x^2+3 \\ y=6x-6 \end{array}\right\}\Rightarrow x^2+3=6x-6\Rightarrow x^2-6x+9=0\Rightarrow (x-3)^2=0\Rightarrow x=3\Rightarrow Punt(3,12)$$

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2+3 \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow No\quad solucions$$

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2+3 \\ x=0 \end{array}\right\}\Rightarrow y=0\Rightarrow Punt\,(0,3)$$

$$\left.\begin{array}{l} y=6x-6 \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 6x-6=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow Punt\,(1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} y=6x-6 \\ x=0 \end{array}\right\}y=-6\Rightarrow Punt\,(0,-6)$$



On només cal que marquem la zona del 1r quadrant

b) Calculeu l'àrea d'aquest recinte.

$$A=\int_0^1 x^2+3dx+\int_1^3 x^2+3-(6x-6)\,dx=\int_0^1 x^2+3dx+\int_1^3 x^2-6x+9\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+9x\right]_1^3=\left(\frac{1}{3}+3-0\right)+\left(9-27+27-\left(\frac{1}{3}-3+9\right)\right)=$$

$$=\frac{10}{3}+\frac{8}{3}=\frac{18}{3}=6u^2$$

c) Calculeu el volum del cos de revolució que genera aquest recinte al girar al voltant de l'eix OX

(1+1,5+1=3,5 punts)

Aquest volum s'ha de separar el dos trossos, que són els corresponents als intervals de x [0,1] i [1,3].

$$V_1=p\int_0^1\left(x^2+3\right)^2dx=p\int_0^1 x^4+6x^2+9\,dx=p\left[\frac{x^5}{5}+2x^3+9x\right]_0^1=$$

$$=p\left(\frac{1}{5}+2+9-0\right)=\frac{56p}{5}u^3$$

$$V_2=p\int_1^3\left(x^2+3\right)^2-\left(6x-6\right)^2dx=p\int_1^3 x^4+6x^2+9-36(x^2-2x+1)dx=$$

$$=p\int_1^3 x^4-30x^2+72x-27\,dx=p\left[\frac{x^5}{5}-10x^3+36x^2-27x\right]_1^3=$$

$$=p\left(\frac{243}{5}-270+324-81-\left(\frac{1}{5}-10+36-27\right)\right)=p\left(\frac{242}{5}-26\right)=\frac{112p}{5}u^3$$

$$V=V_1+V_2=p\left(\frac{56}{5}\right)+p\left(\frac{112}{5}\right)=\frac{168p}{5}u^3$$