Generalitat de Catalunya
Departament d'Ensenyament
**Institut Jaume Balmes**

Departament de Matemàtiques
2n BATX MA
Integrals indefinides

**Nom i Cognoms:** **Grup:** **Data:**

1)
a) Defineix que és una primitiva d'una funció y=f(x)?
b) Trobeu la primitiva de la funció $f(x)=e^{3x}+5$ i que passi pel punt (0,10)

(0,5+1,5=2 punts)

2) Calculeu les integrals següents:

a) $\int x\cdot\sqrt[3]{2x^2+5}\,dx$

b) $\int \dfrac{dx}{x\cdot\sqrt{1-(\ln(x))^2}}$

c) $\int \dfrac{x^3-3x^2+x-1}{x-2}dx$

d) $\int \dfrac{-3x^2+8x+1}{x^3-3x+2}dx$

e) $\int (2x+1)\cdot\cos(2x)\,dx$

(0,75+ 0,75 + 1,25 + 2 + 1,25 =6 punts)

3) Calculeu la integral següent **fent el canvi de variable** $x=t^2$

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

(2 punts)

**Nom i Cognoms:** **Grup:** **Data:**

1)
a) Defineix que és una primitiva d'una funció y=f(x)?
b) Trobeu la primitiva de la funció $f(x)=e^{3x}+5$ i que passi pel punt (0,10)

(0,5+1,5=2 punts)

a) Una primitiva de f(x) és una funció F(X) tal que F ' (x) = f(x) per a tot x del domini de f
b) Les primitives de f(x) són les funcions F(X)

$$F(X)=\int f(x)dx=\int e^{3x}+5\,dx=\int e^{3x}dx+\int 5dx=\frac{1}{3}\int 3e^{3x}dx+5x=\frac{1}{3}e^{3x}+5x+k \quad \forall k\in R$$

I si ara imposem que F(0)=10 $\Rightarrow$

$$\frac{1}{3}e^{0}+5\cdot 0+K=10\Rightarrow \frac{1}{3}+K=10\Rightarrow K=10-\frac{1}{3}\Rightarrow K=\frac{29}{3}$$

i per tant $F(X)=\frac{1}{3}e^{3x}+5x+\frac{29}{3}$

2) Calculeu les integrals següents:

a) $\int x\cdot\sqrt[3]{2x^2+5}\,dx$

b) $\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-(\ln(x))^2}}$

c) $\int\frac{x^3-3x^2+x-1}{x-2}dx$

d) $\int\frac{-3x^2+8x+1}{x^3-3x+2}dx$

e) $\int(2x+1)\cdot\cos(2x)\,dx$

(0,75+ 0,75 + 1,25 + 2 + 1,25 =6 punts)

a)
$$\int x\cdot\sqrt[3]{2x^2+5}\,dx=\int x\cdot\left(2x^2+5\right)^{1/3}dx=\frac{1}{4}\int 4x\cdot\left(2x^2+5\right)^{1/3}dx=$$
$$=\frac{1}{4}\frac{\left(2x^2+5\right)^{4/3}}{4/3}+k=\frac{1}{4}\frac{3}{4}\left(2x^2+5\right)^{4/3}+k=\frac{3}{16}\left(2x^2+5\right)^{4/3}+k \quad \forall k\in R$$

b)
$$\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-(\ln(x))^2}}=\arcsin(\ln(x))+k \quad \forall k\in R$$

c) $\int \frac{x^3-3x^2+x-1}{x-2}dx$

Comencem fent la divisió (que en aquest cas poden fer per Ruffini) i obtenim que:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & & 2 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & \underline{|-3} \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3-3x^2+x-1=(x-2)(x^2-x-1)-3$$

$$\frac{(x-2)(x^2-x-1)-3}{x-2}=(x^2-x-1)-\frac{3}{x-2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^3-3x^2+x-1}{x-2}dx=\int (x^2-x-1)dx-\int \frac{3}{x-2}dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x-3\ln|x-2|+k \quad \forall k \in R$$

d) $\int \frac{-3x^2+8x+1}{x^3-3x+2}dx$

Com el grau del numerador és menor que el del denominador ja podem descompondre aquesta fracció en suma de fraccions. Però prèviament hem de factoritzar el denominador en factors:

Si $q(x)=x^3-3x+2 \;\; i \;\; com \;\; q(1)=0$, podem assegurar que la divisió per (X-1) és exacta:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \underline{|0} \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$$

$$i \;\; ara \;\; com \;\; x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases} =1 \\ =-2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3-3x+2=(x-1)(x-1)(x+2)=(x-1)^2(x+2)$$

Per tant el denominador té una arrel doble (x=1) i una de simple (x=–2).
Així doncs el trencat es pot descompondre així:

$$\frac{-3x^2+8x+1}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x+2)}$$

$$\frac{-3x^2+8x+1}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

Sumant i igualant numeradors tenim:

$-3x^2+8x+1=A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2$

I ara donant valors obtenim les incògnites:

- Si X= 1 $\Rightarrow$ – 3+8+1=3A $\Rightarrow$ 6=3A $\Rightarrow$ A=2
- Si X= –2 $\Rightarrow$ –12 – 16 + 1 = C 9 $\Rightarrow$ –27 = 9 C $\Rightarrow$ C= – 3
- Igualant els termes independents (X=0) $\Rightarrow$ 1= 2 A – 2B + C $\Rightarrow$ 1= 4 –2 B – 3 $\Rightarrow$ 2 B = 0 $\Rightarrow$ B=0

Així doncs ara ja podem integrar:

$$\int\frac{-3x^2+8x+1}{(x-1)^2(x+2)}dx=\int\frac{2}{(x-1)^2}dx+\int\frac{-3}{(x+2)}dx=2\int(x-1)^{-2}dx-3\int\frac{dx}{(x+2)}=$$

$$=2\frac{(x-1)^{-1}}{-1}-3\ln|x+2|+k=\frac{-2}{(x-1)}-3\ln|x+2|+k\quad\forall k\in R$$

e) $\int(2x+1)\cdot\cos(2x)\,dx$

Aquesta s'ha de fer per parts

$u=2x+1\Rightarrow u'=2$

$$v'=\cos(2x)\Rightarrow v=\int\cos(2x)dx=\frac{1}{2}\int2\cos(2x)dx=\frac{1}{2}\sin(2x)$$

I per tant

$$\int(2x+1)\cdot\cos(2x)\,dx=\frac{(2x+1)\sin(2x)}{2}-\int2\frac{1}{2}\sin(2x)dx=\frac{(2x+1)\sin(2x)}{2}-\frac{1}{2}\int2\sin(2x)dx=$$

$$=\frac{(2x+1)\sin(2x)}{2}-\frac{1}{2}(-\cos(2x))+k=\frac{1}{2}[(2x+1)\sin(2x)+\cos(2x)]+k\qquad\forall k\in R$$

3) Calculeu la integral següent **fent el canvi de variable** $x=t^2$

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

(2 punts)

Si fem el canvi de variable indicat tenim que $x=t^2\Rightarrow dx=2t\,dt$ **i per tant**

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\int\frac{2t\,dt}{\left(1+t^2\right)\sqrt{t^2}}=\int\frac{2\,dt}{\left(1+t^2\right)}=2\int\frac{dt}{1+t^2}=2\,\arctan(t)+k=$$

$$=2\,\arctan\left(\sqrt{x}\right)+k\qquad\forall k\in R$$