Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1)

a) Comproveu que $\int \frac{1}{\sin(x)\cos x}dx = \ln|\tan(x)| + k \quad \forall k \in R$

b) Trobeu la funció derivable F(x) verifica les condicions següents:

$F'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ i $F(1) = 3$

(1+ 1 =2 punts)

2) Calculeu les integrals següents:

a) $\int \frac{x\sin(5x^2)}{\cos^4(5x^2)}dx$

b) $\int \frac{1+e^{7x}}{e^{7x}+7x}dx$

c) $\int \frac{x^3-5x^2+x+4}{x^2+1}dx$

d) $\int \frac{3x^2-4x+7}{x^3-3x-2}dx$

e) $\int 8x \cdot e^{-4x}\ dx$

(0,75+ 0,75 + 1,25 + 2 + 1,25 =6 punts)

3) Calculeu la integral següent **fent el canvi de variable** $1-x=t^3$

$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{1-x}}dx$

(2 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1)

a) Comproveu que $\int \frac{1}{\sin(x)\cos x}dx = \ln|\tan(x)| + k \quad \forall k \in R$

b) Trobeu la funció derivable F(x) verifica les condicions següents:

$F'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \quad i \quad F(1) = 3$

(0,5+1,5=2 punts)

a) Sigui $F(x) = \ln|\tan(x)| + k$ Hem de demostrar que $F'(x) = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}$

Així doncs anem a derivar la funció F(x)

$$F'(x) = \frac{1}{\tan(x)}\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\cancel{\cos(x)}}{\sin(x)}\frac{1}{\cos^{\cancel{2}}(x)} = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}$$

b) La F(x) és una primitiva de F'(X)

$$F(X) = \int F'(x)dx = \int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx = \int x^{-1/4}dx = \frac{x^{3/4}}{3/4} = \frac{4}{3}x^{3/4} + k \quad \forall k \in R$$

I si ara imposem que F(1)=3 $\Rightarrow$

$$F(1) = \frac{4}{3}1^{3/4} + k = 3 \Rightarrow \frac{4}{3} + K = 3 \Rightarrow K = 3 - \frac{4}{3} \Rightarrow K = \frac{5}{3}$$

i per tant $F(X) = \frac{4}{3}x^{4/3} + \frac{5}{3} = \frac{4\sqrt[3]{x^4}+5}{3} = \frac{4x\sqrt[3]{x}+5}{3}$

2) Calculeu les integrals següents:

a) $\int \frac{x\sin(5x^2)}{\cos^4(5x^2)}dx$

b) $\int \frac{1+e^{7x}}{e^{7x}+7x}dx$

c) $\int \frac{x^3-5x^2+x+4}{x^2+1}dx$

d) $\int \frac{3x^2-4x+7}{x^3-3x-2}dx$

e) $\int 8x\cdot e^{-4x}\,dx$

(0,75+ 0,75 + 1,25 + 2 + 1,25 =6 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

a)

$$\int \frac{x\sin(5x^2)}{\cos^4(5x^2)}dx = \int x\sin(5x^2)\left[\cos(5x^2)\right]^{-4} dx =$$

$$= \frac{-1}{10}\int -10x\sin(5x^2)\left[\cos(5x^2)\right]^{-4} dx = \frac{-1}{10}\frac{\left[\cos(5x^2)\right]^{-3}}{-3} + k =$$

$$= \frac{1}{30\cos^3(5x^2)} + k \qquad \forall k \in R$$

b)

$$\int \frac{1+e^{7x}}{e^{7x}+7x}dx = \frac{1}{7}\int \frac{7\left(1+e^{7x}\right)}{e^{7x}+7x}dx = \frac{1}{7}\ln\left|e^{7x}+7x\right| + k \qquad \forall k \in R$$

c) $\int \frac{x^3-5x^2+x+4}{x^2+1}dx$

Comencem fent la divisió:

$$\begin{array}{l|l} x^3-5\cdot x^2+x+4 & x^2+1 \\ \hline \quad\ddots & x-5 \\ \quad 9 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3-5x^2+x+4 = (x^2+1)(x-5)+9$$

$$\frac{(x^2+1)(x-5)+9}{(x^2+1)} = (x-5) + \frac{9}{(x^2+1)} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{x^3-5x^2+x+4}{x^2+1}dx = \int (x-5)\,dx + \int \frac{9}{(x^2+1)}dx = \frac{x^2}{2} - 5x + 9\,arc\tan(x) + k \quad \forall k \in R$$

d) $\int \frac{3x^2-4x+7}{x^3-3x-2}dx$

Com el grau del numerador és menor que el del denominador ja podem descompondre aquesta fracció en suma de fraccions. Però prèviament hem de factoritzar el denominador en factors:

Si $q(x)=x^3-3x-2 \ \ i \ \ com \ \ q(2)=0$, podem assegurar que la divisió per (X-2) és exacta:

	1	0	–3	–2
2		2	4	2
	1	2	1	0

$$\Rightarrow x^3-3x-2=(x-2)(x^2+2x+1)=(x-2)(x+1)^2$$

Per tant el denominador té una arrel doble (x=–1) i una de simple (x=2). Així doncs el trencat es pot descompondre així:

$$\frac{3x^2-4x+7}{x^3-3x-2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)}$$

$$\frac{3x^2-4x+7}{(x-2)(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+B(x-2)+C(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+1)^2}$$

Sumant i igualant numeradors tenim:

$$3x^2-4x+7=A(x+1)^2+B(x-2)+C(x+1)(x-2)$$

I ara donant valors obtenim les incògnites:

- Si X= –1 $\Rightarrow$ 3+4+7= –3B $\Rightarrow$ 14= –3B $\Rightarrow$ B= –14/3
- Si X= 2 $\Rightarrow$ 12–8+7 = A 9 $\Rightarrow$ 11 = 9 A $\Rightarrow$ A= 11/9
- Igualant els termes independents (X=0) $\Rightarrow$ 7= A – 2B – 2 C $\Rightarrow$ 7= 11/9 +28/3 – 2 C $\Rightarrow$ 7– 11/9 – 28/3 = –2C $\Rightarrow$ C=16/9

Així doncs ara ja podem integrar:

$$\int \frac{3x^2-4x+7}{x^3-3x-2}dx=\int \frac{11/9}{(x-2)}dx+\int \frac{-14/3}{(x+1)^2}dx+\int \frac{16/9}{(x+1)}dx=$$

$$=\frac{11}{9}\int \frac{dx}{(x-2)}-\frac{14}{3}\int (x+1)^{-2}dx+\frac{16}{9}\int \frac{dx}{(x+1)}=$$

$$=\frac{11}{9}\ln|x-2|-\frac{14}{3}\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+\frac{16}{9}\ln|x+1|+k=$$

$$=\frac{11}{9}\ln|x-2|+\frac{14}{3(x+1)}+\frac{16}{9}\ln|x+1|+k \quad \forall k\in R$$

e) $\int 8x \cdot e^{-4x}\ dx$

Aquesta s'ha de fer per parts

$u = 8x \Rightarrow u' = 8$

$v' = e^{-4x} \Rightarrow v = \int e^{-4x}dx = \frac{1}{-4}\int -4e^{-4x}dx = \frac{-1}{4}e^{-4x}$

I per tant

$$\int 8x \cdot e^{-4x}\ dx = \frac{-8x \cdot e^{-4x}}{4} - \int 8\frac{-e^{-4x}}{4}dx = -2x \cdot e^{-4x} + 2\int e^{-4x}dx =$$

$$= -2x \cdot e^{-4x} + \frac{2}{-4}\int -4e^{-4x}dx = -2x \cdot e^{-4x} - \frac{1}{2}e^{-4x} + k = -e^{-4x}\left(2x + \frac{1}{2}\right) + k$$

$\forall k \in R$

3) Calculeu la integral següent **fent el canvi de variable** $1 - x = t^3$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{1-x}}dx$$

(2 punts)

Si fem el canvi de variable indicat tenim que

$1 - x = t^3 \Rightarrow 1 - t^3 = x \Rightarrow -3t^2 dt = dx$

i per tant

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{1-x}}dx = \int \frac{\left(1-t^3+1\right)\left(-3t^2\ dt\right)}{\sqrt[3]{t^3}} = \int \frac{\left(2-t^3\right)\left(-3t^{\cancel{2}}\ dt\right)}{\cancel{t}} = \int\left(2-t^3\right)\left(-3t\ dt\right) =$$

$$= -3\int 2t - t^4\ dt = -3\left(2\frac{t^2}{2} - \frac{t^5}{5}\right) + k = -3\left(t^2 - \frac{t^5}{5}\right) + k =$$

$$= -3t^2 + \frac{3t^5}{5} + k = -3\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2 + \frac{3\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^5}{5} + k \quad \forall k \in R$$