



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

- 1) Enuncieu i demostreu la Regla de Barrow (2n teorema fonamental del càlcul integral).

(1 punt)

- 2) Donades les corbes
$$\left. \begin{array}{l} y = -x^3 + 2x^2 \\ y = -x + 2 \end{array} \right\}$$

- a) Dibuixeu el recinte limitat per aquestes corbes
- b) Calculeu l'àrea d'aquest recinte.
- c) Calculeu el volum del cos de revolució que genera la part d'aquest recinte que es troba entre $x=1$ i $x=2$ al girar al voltant de l'eix OX

(1+1,5+1,5=4 punts)

- 3) Tres amics A, B i C volen fer un present a un amic comú. El present els costa 780 €. Com que no disposen de la mateixa quantitat de diners, decideixen pagar de la següent manera: A paga el triple del que paguen B i C junts, i per cada 5 euros que paga B, C paga 8 euros. Quant paga cadascú?

[Atenció!!! cal solucionar el sistema utilitzant el mètode de Gauss]

(2,5 punts)

- 4) Donat el sistema d'equacions
$$\begin{cases} x - y + 7z = 8 \\ x + 3y + 5z = 6 \end{cases}$$

- a) Afegiu-hi una equació lineal de manera que el sistema resultant sigui incompatible.
- b) Afegiu-hi una equació lineal de manera que el sistema resultant sigui compatible indeterminat.

[Justifiqueu en cada cas el procediment seguit].

(1 punt)

- 5) Discussiu com és aquest sistema (és a dir digueu si té o no solucions i quantes) segons el valor del paràmetre k . I interpreteu geomètricament les solucions.

$$\left. \begin{array}{rclclcl} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & (k-1)y & + & (k+2)z & = & k+3 \\ x & - & y & + & kz & = & k \end{array} \right\}$$

(1,5 punts)



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

- 1) Enuncieu i demostreu la Regla de Barrow (2n teorema fonamental del càlcul integral).

(1 punt)

2n Teorema Fonamental del càlcul integral (Regla de Barrow)

$f(x)$ funció contínua en $[a,b]$
 $G(x)$ és una primitiva de $f(x)$ $\} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$

Demostració

Recordem el 1r Teorema fonamental del càlcul integral

Si $f(x)$ és una funció contínua en $[a,b]$

definim la funció $A(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow \begin{matrix} A(x) \text{ és derivable i} \\ A'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b] \end{matrix}$

Així doncs tenim dues primitives d'una mateixa funció:

$$A'(x) = f(x) \quad \text{i} \quad G'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Per tant podem afirmar que només es diferencien en una constant:

$$A(x) = G(x) + K \quad \text{per cert } K \in \mathbb{R}$$

En aquesta igualtat fem $x=a$ i podrem obtenir el valor de la constant K que falta:

$$A(a) = G(a) + K \Rightarrow \int_a^a f(t)dt = G(a) + K \Rightarrow 0 = G(a) + K \Rightarrow -G(a) = K$$

I substituint a la igualtat anterior tenim que:

$A(x) = G(x) - G(a) \quad \forall x \in [a,b]$ i si ara en aquesta darrera igualtat donem a la x el valor b

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) \quad \text{Com volíem demostrar}$$

- 2) Donades les corbes
$$\left. \begin{matrix} y = -x^3 + 2x^2 \\ y = -x + 2 \end{matrix} \right\}$$

a) Dibuixeu el recinte limitat per aquestes corbes

- Observeu que les dues funcions són contínues a tot $\mathbb{R}$.
- A més sabem que una és una cúbica i una altra una recta amb pendent negativa

o La recta passa pels punt $(0,2)$, $(1,1)$ i $(2, 0)$

o De la cúbica sabem que talla l'eix OX ($y=0$) en $x=0$, i $x=2$ i també que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 + 2x^2 = +\infty \quad \text{i que} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + 2x^2 = -\infty$$

- Si les tallen per obtenir els punts d'intersecció de les dues corbes tenim:

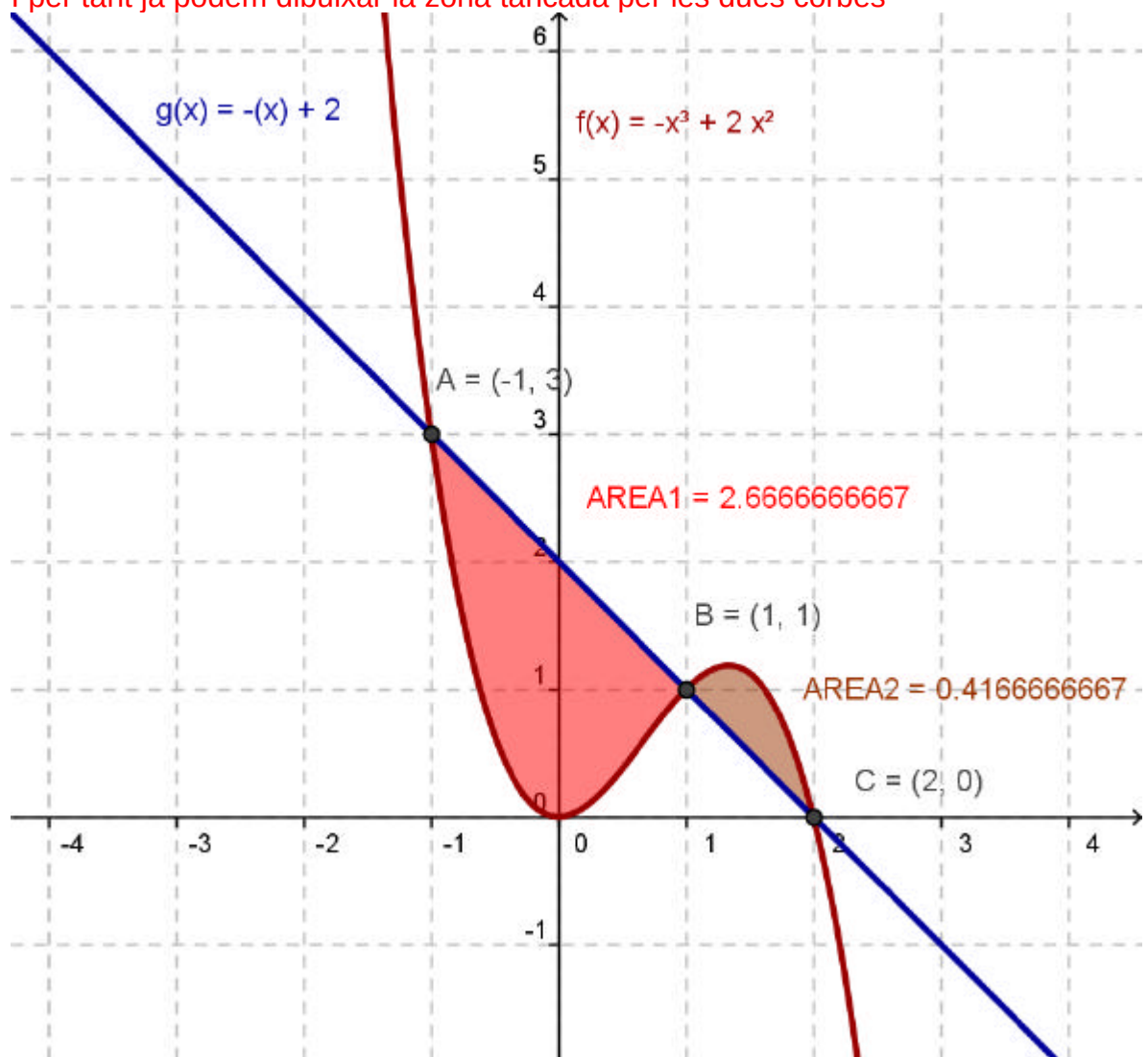
$$\left. \begin{matrix} y = -x^3 + 2x^2 \\ y = -x + 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow -x^3 + 2x^2 = -x + 2 \Rightarrow -x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0$$

Hem de descompondre el polinomi en factors. Observem que el polinomi és divisible per $(x-1)$, ja que $x=1$ és un zero del polinomi, així doncs dividint per Ruffini tenim

	-1	2	1	-2
1		-1	1	2
	-1	1	2	<u>0</u>

$$\Rightarrow (x-1)(-x^2+x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ -x^2+x+2=0 \\ x=\frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{-2}=-1 \\ x=\frac{-4}{-1}=2 \end{cases} \end{cases}$$

I per tant ja podem dibuixar la zona tancada per les dues corbes



b) Calculeu l'àrea d'aquest recinte.

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^1 -x + 2 - (-x^3 + 2x^2) dx + \int_1^2 -x^3 + 2x^2 - (-x + 2) dx = \\
 &= \int_{-1}^1 x^3 - 2x^2 - x + 2 dx + \int_1^2 -x^3 + 2x^2 + x - 2 dx = \\
 &= \left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^2 = \\
 &= \left[\left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{2}{3}} \cancel{\frac{1}{2}} + 2 \right) - \left(\cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{2}{3}} \cancel{\frac{1}{2}} - 2 \right) \right] + \\
 &+ \left[\left(-4 + \frac{16}{3} + 2 - 4 \right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) \right] = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{32}{12} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} \text{ unitats}^2
 \end{aligned}$$

c) Calculeu el volum del cos de revolució que genera la part d'aquest recinte que es troba entre $x=1$ i $x=2$ al girar al voltant de l'eix OX

$$\begin{aligned}
 V &= p \int_1^2 (-x^3 + 2x^2)^2 - (-x + 2)^2 dx = \\
 &= p \int_1^2 (x^6 - 4x^5 + 4x^4) - (x^2 - 4x + 4) dx = \\
 &= p \int_1^2 x^6 - 4x^5 + 4x^4 - x^2 + 4x - 4 dx = \\
 &= p \left[\frac{x^7}{7} - \frac{4x^6}{6} + \frac{4x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 4x \right]_1^2 = \\
 &= p \left[\left(\frac{128}{7} - \frac{128}{3} + \frac{128}{5} - \frac{8}{3} + \cancel{8} - \cancel{8} \right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{3} + \frac{4}{5} - \frac{1}{3} + 2 - 4 \right) \right] = \\
 &= p \left[\frac{-152}{105} + \frac{72}{35} \right] = \frac{64p}{105} \text{ unitats}^3
 \end{aligned}$$

(1+1,5+1,5=4 punts)

- 3) Tres amics A, B i C volen fer un present a un amic comú. El present els costa 780 €. Com que no disposen de la mateixa quantitat de diners, decideixen pagar de la següent manera: A paga el triple del que paguen B i C junts, i per cada 5 euros que paga B, C paga 8 euros. Quant paga cadascú?

[Atenció!!! cal solucionar el sistema utilitzant el mètode de Gauss]

(2,5 punts)

Sigui $x =$ els € que paga A, $y =$ els € que paga B i $z =$ els € que paga C

Resolució:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 780 \\ x = 3 \cdot (y + z) \\ \frac{y}{z} = \frac{5}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 780 \\ x - 3y - 3z = 0 \\ 8y - 5z = 0 \end{array} \right\}$$

Apliquem Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 780 \\ 0 & -4 & -4 & -780 \\ 0 & 0 & -13 & -1560 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 585 \\ 0 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & 120 \end{array} \right) \text{ d'on } \boxed{x = 585}, \boxed{y = 75} \text{ i } \boxed{z = 120}$$

Solució: A paga 585 €, B 75 € i C 120 €

- 4) Donat el sistema d'equacions $\begin{cases} x - y + 7z = 8 \\ x + 3y + 5z = 6 \end{cases}$.

- Afegiu-hi una equació lineal de manera que el sistema resultant sigui incompatible.
- Afegiu-hi una equació lineal de manera que el sistema resultant sigui compatible indeterminat.

[Justifiqueu en cada cas el procediment seguit].

(1 punt)

- a) Només cal afegir una equació que sigui contradictòria amb qualsevol d'aquestes per exemple com la F1 per canviant el terme independent per una altre nombre.

$$\begin{cases} x - y + 7z = 8 \\ x + 3y + 5z = 6 \\ x - y + 7z = 10 \end{cases}$$

- b) Aquest sistema si l'escalonem fent $F2 - F1$ observem que ja és SCI amb 1 grau de llibertat.

Per tant només cal afegir una equació que es dedueixi de les anteriors, per exemple $2F1$

$$\begin{cases} x - y + 7z = 8 \\ x + 3y + 5z = 6 \\ 2x - 2y + 14z = 16 \end{cases}$$

- 5) Discutiu com és aquest sistema (és a dir digueu si té o no solució i quantes) segons el valor del paràmetre k. I interpreteu geomètricament les solucions.

$$\left. \begin{array}{rrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & + & (k-1)y & + & (k+2)z & = & k+3 \\ x & - & y & + & kz & = & k \end{array} \right\}$$

(1,5 punts)

Escalonem el sistema fent per exemple $F_2 - 2F_1$ i $F_3 - F_1$ obtenint:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & k+1 & k-2 & k-1 \\ 0 & 0 & k-2 & k-2 \end{array} \right)$$

I ara ja tenim els tres casos:

CAS I: $\forall K \neq -1$ i $K \neq 2$ el sistema és Sistema Compatible Determinat (SCD) per tant té una única solució i podem dir que cada equació és un pla de l'espai i que els tres plans tenen un únic punt en comú

CAS II: Si $K = -1$ el sistema queda així i escalonant-lo tenim

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

que a la vista de la F_3 observem una contradicció i per tant podem assegurar que el sistema no té solució, és a dir és Incompatible (SI).

La qual cosa vol dir que els tres plans no tenen cap punt en comú. En aquest cas es veu que el pla $2n$ i $3r$ són paral·lels (ja que aquestes dues equacions són incompatibles) i el 1r pla talla tant al 1r com al $2n$ en el punt d'una recta (SCI amb 1 grau de llibertat).

CAS III: Si $K = 2$ el sistema queda així

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

i per tant podem eliminar la F_3 i tenim que el sistema és SCI amb 1 grau de llibertat, i podem agafar com a paràmetre lliure tant x com la z .

La qual cosa vol dir que els tres plans que determinen les equacions tenen una recta en comú.