



Nom i Cognoms:

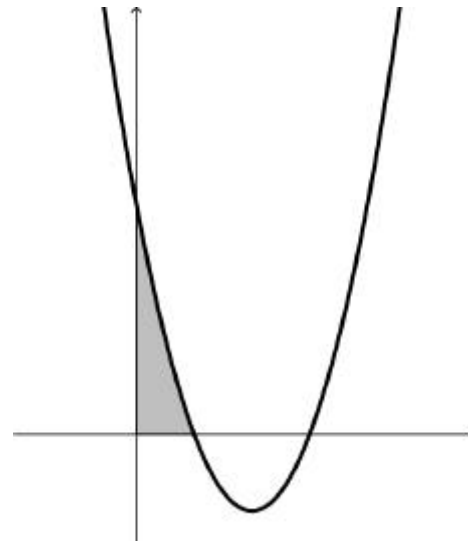
Grup:

Data:

- 1) Enuncieu i demostreu el 1r teorema fonamental del càlcul integral.

(1 punt)

- 2) Trobeu l'expressió analítica de la funció polinòmica de 2n grau que talla a l'eix OX en els punts de $x=1$ i $x=3$, i de la qual sabem que l'àrea ombrejada de la figura val $4/3$



(1 punt)

- 3) Considereu la zona tancada per les corbes $y = x^3 - 4x$ i $y = x^2 - 2x$
- Dibuixeu el recinte limitat per aquestes corbes
 - Calculeu l'àrea de la superfície d'aquesta zona
 - Calculeu el volum del cos de revolució que s'obté en fer girar aquesta zona al voltant de l'eix OX

(1+1,5+1,5=4 punts)

- 4) Tinc tres pots de capacitats diferents. Els tres estan plens d'aigua. Si buido el pot més gran el puc tornar a omplir amb els altres dos pots, i si buido el pot petit, amb el mitjà el puc omplir de nou sobrant 1 L. Els tres pots contenen una quantitat d'aigua de 10 L. Quina és la capacitat de cada pot?

[Atenció!!! cal solucionar el sistema utilitzant el mètode de Gauss]

(2,5 punts)

- 5) Discutiu com són aquests sistemes (és a dir digueu si tenen o no solucions i quantes) i interpreteu geomètricament les solucions.

$$\begin{array}{lcl}
 \text{a)} & \left. \begin{array}{l} 30x + ay + bz = c \\ 7y + dz = f \\ -\frac{3}{4}z = f \end{array} \right\} & \text{b)} \left. \begin{array}{l} x + ay + bz = c \\ y + 3z = 6 \\ 2y + 6z = 12 \end{array} \right\} \\
 \text{c)} & \left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 6 \\ x + 2y + 3z = 7 \\ + 6z = 6 \end{array} \right\} &
 \end{array}$$

(1,5 punts)



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

- 1) Enuncieu i demostreu el 1r teorema fonamental del càlcul integral.

(1 punt)

Teorema fonamental del càlcul integral

Si $f(x)$ és una funció contínua en $[a,b]$

definim la funció $A(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow A(x)$ és derivable i
 $A'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

Demostració:

$\forall x \in [a,b]$ anem a veure si existeix $A'(x)$

$$\begin{aligned} A'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \end{aligned}$$

Però pel Teorema del Valor mitjà del càlcul integral sabem que $\exists c \in [x, x+h]$ tal que $\int_x^{x+h} f(t) dt = f(c)(x+h-x) = f(c)h$

Així doncs tenim que

$$A'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c) \cdot h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c)$$

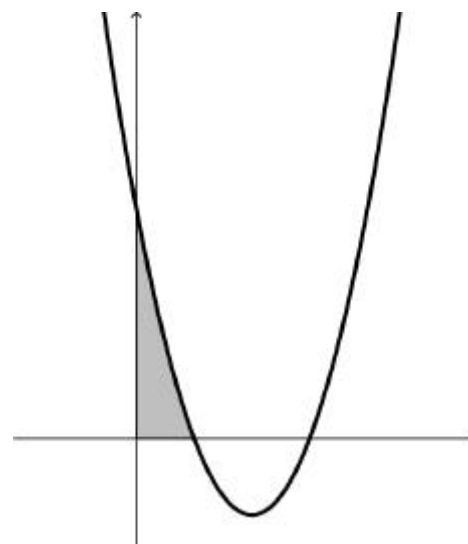
però com $c \in [x, x+h]$ resulta que quan fem el $\lim_{h \rightarrow 0}$

obtenim que $c \in [x, x] \Rightarrow c = x$ amb la qual cosa tenim que

$$A'(x) = f(x)$$

Com volíem demostrar.

- 2) Trobeu l'expressió analítica de la funció polinòmica de 2n grau que talla a l'eix OX en els punts de $x=1$ i $x=3$, i de la qual sabem que l'àrea ombrejada de la figura val $4/3$



(1 punt)

La funció és $y = a(x-1)(x-3) = ax^2 - 4ax + 3a$ on sabem també que $a > 0$

Ara calculem l'àrea tancada per $x=0$ (eix OY); $x=1$; $y=0$ (eix OX) i la corba $y = ax^2 - 4ax + 3a$ i finalment imposarem que ha de ser $4/3$

$$\int_0^1 ax^2 - 4x + 3 \, dx = \left[\frac{ax^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x \right]_0^1 = \left[\frac{ax^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_0^1 = \left(\frac{a}{3} - 2 + 3 \right) - 0 = \frac{a}{3} + 1$$

I ara imposant que $\frac{a}{3} + 1 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow a + 3 = 4 \Leftrightarrow a = 1$

Per tant la funció buscada és $f(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$

2a manera. Amb tres incògnites

Alguns de vosaltres heu plantejat el problema amb tres incògnites. Realment és més llarga però també surt.

En lloc de dir directament que la funció és $y = a(x-1)(x-3) = ax^2 - 4x + 3$ on sabem també que $a > 0$

plantegeu que

$f(x) = ax^2 + bx + c$ on $a > 0$

I com sabem que $f(0)=0$ i $f(3)=0$ teniu les equacions:

$$\square \quad x+y+z=0$$

$$\square \quad 9x+3y+z=0$$

Aleshores afegint la condició que falta que és que l'àrea tancada per $x=0$ (eix OY); $x=1$; $y=0$ (eix OX) i la corba $y = ax^2 - 4x + 3$ ha de ser $4/3$

$$\int_0^1 ax^2 + bx + c \, dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right]_0^1 = \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c \right) - 0 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$$

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = \frac{4}{3} \Rightarrow 2a + 3b + 6c = 8$$

Obtenint així el sistema d'equacions següent:

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ 2a + 3b + 6c = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} F2 - F1 \\ F3 - 6F1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ 8a + 2b = 0 \\ -4a - 3b = 8 \end{array} \right. \\ \\ \left. \begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ 8a + 2b = 0 \\ -2b = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = -4 \\ a = 1 \\ c = 3 \end{array} \right. \\ F3 + \frac{F2}{2} \end{array}$$

Per tant la funció buscada és $f(x) = x^2 - 4x + 3$

3) Considereu la zona tancada per les corbes $y = x^3 - 4x$ i $y = x^2 - 2x$

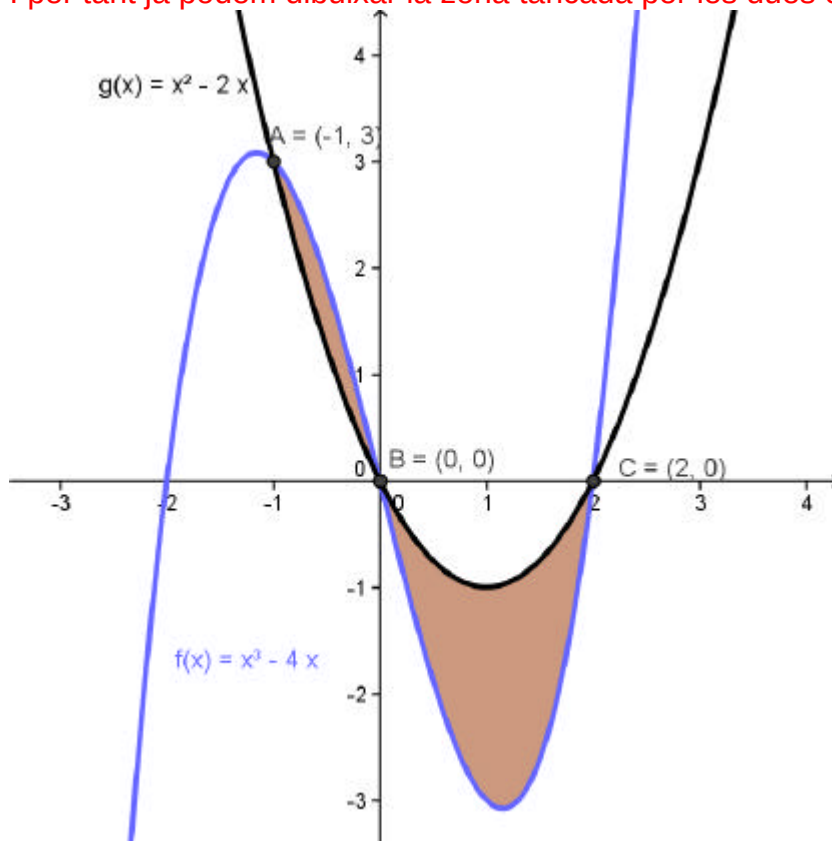
a) Dibuixeu el recinte limitat per aquestes corbes

- Observeu que les dues funcions són contínues a tot $\mathbb{R}$.
- A més sabem que una és una cúbica i una altra una paràbola amb branques cap a dalt
 - o La paràbola té branques cap a dalt i talla l'eix OX ($y=0$) en $x=0$ i $x=2$
 - o De la cúbica sabem que talla l'eix OX ($y=0$) en $x=0$, $x=-2$ i $x=2$ i també que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 4x = -\infty$ i que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 4x = +\infty$
- Si les tallen per obtenir els punts d'intersecció de les dues corbes tenim:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^3 - 4x \\ y = x^2 - 2x \end{array} \right\} \Rightarrow x^3 - 4x = x^2 - 2x \Rightarrow x^3 - 4x - x^2 + 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array} \right.$$

I per tant ja podem dibuixar la zona tancada per les dues corbes



b) Calculeu l'àrea de la superfície d'aquesta zona

Per calcular l'àrea l'hem de fer amb dos trossos

$$A = \int_{-1}^0 (x^3 - 4x - (x^2 - 2x)) dx + \int_0^2 (x^2 - 2x - (x^3 - 4x)) dx =$$

$$= \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx + \int_0^2 (x^2 + 2x - x^3) dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 =$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) + \left(\frac{8}{3} + 4 - 4 \right) = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{5}{12} + \frac{32}{12} = \frac{37}{12} \text{ unitats}^2$$

- c) Calculeu el volum del cos de revolució que s'obté en fer girar aquesta zona al voltant de l'eix OX

(1+1,5+1,5=4 punts)

Per calcular el volum també hem de fer dos trossos

$$\begin{aligned}
 V &= p \int_{-1}^0 (x^3 - 4x)^2 - (x^2 - 2x)^2 dx + p \int_0^2 (x^3 - 4x)^2 - (x^2 - 2x)^2 dx = \\
 &= p \int_{-1}^0 (x^6 - 8x^4 + 16x^2) - (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx + \\
 &+ p \int_0^2 (x^6 - 8x^4 + 16x^2) - (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \\
 &= p \int_{-1}^0 x^6 - 9x^4 + 4x^3 + 12x^2 dx + p \int_0^2 -x^6 + 9x^4 - 4x^3 - 12x^2 dx = \\
 &= p \left[\frac{x^7}{7} - \frac{9x^5}{5} + x^4 + 4x^3 \right]_{-1}^0 + p \left[\frac{x^7}{7} - \frac{9x^5}{5} + x^4 + 4x^3 \right]_0^2 = \\
 &= p \left[0 - \left(\frac{-1}{7} + \frac{9}{5} + 1 - 4 \right) + \left(\frac{128}{7} - \frac{288}{5} + 16 + 32 \right) \right] = p \left(\frac{47}{35} + \frac{304}{35} \right) = \frac{351p}{35} \text{ unitats}^3
 \end{aligned}$$

Com els dos trossos són de la mateixa integral també podien haver-los juntat fent això

$$\begin{aligned}
 V &= p \int_{-1}^0 (x^3 - 4x)^2 - (x^2 - 2x)^2 dx + p \int_0^2 (x^3 - 4x)^2 - (x^2 - 2x)^2 dx = \\
 &= p \int_{-1}^2 (x^6 - 8x^4 + 16x^2) - (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \\
 &= p \int_{-1}^2 x^6 - 9x^4 + 4x^3 + 12x^2 dx = p \left[\frac{x^7}{7} - \frac{9x^5}{5} + x^4 + 4x^3 \right]_{-1}^2 = \\
 &= p \left[\left(\frac{128}{7} - \frac{288}{5} + 16 + 32 \right) - \left(\frac{-1}{7} + \frac{9}{5} + 1 - 4 \right) \right] = p \left[\frac{304}{35} + \frac{47}{35} \right] = \frac{351p}{35} \text{ unitats}^3
 \end{aligned}$$

- 4) Tinc tres pots de capacitats diferents. Els tres estan plens d'aigua. Si buido el pot més gran el puc tornar a omplir amb els altres dos pots, i si buido el pot petit, amb el mitjà el puc omplir de nou sobrant 1 L. Els tres pots contenen una quantitat d'aigua de 10 L. Quina és la capacitat de cada pot?

[Atenció!!! cal solucionar el sistema utilitzant el mètode de Gauss]

(2,5 punts)

Resolució:

x = pot gran
y = pot mitjà
z = pot petit

$$\left. \begin{array}{l} x = y + z \\ y = z + 1 \\ x + y + z = 10 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ y - z = 1 \\ x + y + z = 10 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{x = 5}, \boxed{y = 3} \text{ i } \boxed{z = 2}$$

Solució: La capacitat dels pots són de 5 litres, 3 litres i 2 litres.

- 5) Discutiu com són aquests sistemes (és a dir digueu si tenen o no solucions i quantes) i interpreteu geomètricament les solucions.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{rcl} 30x + ay + bz & = & c \\ 7y + dz & = & f \\ \frac{-3}{4}z & = & f \end{array} \right\}$$

El sistema és clarament Sistema Compatible Determinat (SCD) per tant té una única solució i podem dir que cada equació és un pla de l'espai i que els tres plans tenen un únic punt en comú

b)

$$\left. \begin{array}{rcl} x + ay + bz & = & c \\ y + 3z & = & 6 \\ 2y + 6z & = & 12 \end{array} \right\}$$

Aquí si ara fem $F3 - 2 F2$ tenim la última fila queda $0=0$ per tant la podem eliminar.

Així doncs tenim que el Sistema és Compatible Indeterminat (SCI) amb un grau de llibertat. I vist com queda escalonat podem agafar com a incògnita lliure tant la y com la z.

La qual cosa vol dir que els tres plans que determinen les equacions tenen una recta en comú.

També es veu que el 2n i el 3r pla són el mateix (les seves equacions són proporcionals) i per tant tenim que el 1r pla talla als anteriors en una recta.

$$c) \quad \left. \begin{array}{rclcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 6 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 7 \\ & & & + & 6z & = & 6 \end{array} \right\}$$

Aquí si fem $F_2 - F_1$ obtenim $0=1$ és a dir una contradicció. Per tant el sistema no té solució, és a dir és Incompatible (SI). I podem dir que els tres plans no tenen cap punt en comú. També podem veure que el $1r$ i $2n$ són paral·lels (formen un SI) i que el $3r$ talla tant a $1r$ com a $2n$ en els punt d'una recta (els dos sistemes són SCI amb 1 grau de llibertat).

(1,5 punts)