Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Trobeu la primitiva de la funció $f(x) = \frac{1}{x} + 5$ i que passi pel punt (1,10)

(0,5 punts)

2) Calculeu les integrals següents:

a) $\int 7x^2 \cdot \sqrt[3]{8x^3 + 5}\, dx$

b) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}\, dx$

c) $\int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x} dx$

d) $\int x\, e^{7x}\, dx$

(0,75+ 0,75 + 2 + 1,5 =5 punts)

3) Calculeu la integral següent **fent el canvi de variable x = 4 t**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$$

(2 punts)

4) Enuncieu i demostreu la Regla de Barrow (2n teorema fonamental del càlcul integral).

(1 punt)

5) Donades les corbes $\left.\begin{matrix} y = x^3 + 3x^2 - 2 \\ y = x + 1 \end{matrix}\right\}$ calculeu l'àrea del recinte limitat per aquestes corbes

(1,5 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Trobeu la primitiva de la funció $f(x)=\frac{1}{x}+5$ i que passi pel punt (1,10)

(0,5 punts)

1

$f(x)=\frac{1}{x}+5$

TOTES LES PRIMITIVES SEVES SÓN

$G(x)=\int \frac{1}{x}+5\,dx = \ln|x|+5x+C \quad \forall C\in\mathbb{R}$

Com $G(1)=10 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\ln(1)+5+C=10\\ 0+5+C=10\end{array}\right\} \Rightarrow C=5$

$\Rightarrow$ la PRIMITIVA BUSCADA és $G(x)=\ln|x|+5x+5$

2) Calculeu les integrals següents:

a) $\int 7x^2\cdot\sqrt[3]{8x^3+5}\;dx$

b) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}\;dx$

c) $\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}dx$

d) $\int x\,e^{7x}\;dx$

(0,75+ 0,75 + 2 + 1,5 =5 punts)

2

a) $\int 7x^2\sqrt[3]{8x^3+5}\,dx = \frac{7}{24}\int 24x^2\sqrt[3]{8x^3+5}\,dx =$

$= \frac{7}{\cancel{24}_{8}}\frac{\cancel{3}^{1}}{4}(8x^3+5)^{4/3}+C = \frac{7}{32}(8x^3+5)^{4/3}+C \quad \forall C\in\mathbb{R}$

b) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}\,dx = \frac{1}{3}\int\frac{3e^{3x}}{\sqrt{1-(e^{3x})^2}} = \frac{1}{3}\arcsin(e^{3x})+C \quad \forall C\in\mathbb{R}$

c) $\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x}\,dx$

- NO ÈS IMMEDIATA
- ES FUNCIÓ RACIONAL ⇒ Anem a descomposar el denominador.

$x^3-2x^2+x = x\underbrace{(x^2-2x+1)}_{} = x(x-1)^2$

Busquem els seus zeros o veient que és un quadrat perfecte.
$x^2-2x+1=(x-1)^2$

⇒ Ara ja podem descomposar el trencat com a suma de trencats:

$$\frac{2x^2-3x+3}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Sumant amb el mcm dels denominadors

$$\frac{2x^2-3x+3}{x(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}$$

Com tenen el mateix denominador ⇒
⇒ Podem igualar els NUMERADORS

$$2x^2-3x+3 = A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$$

Si $x=0$ ⇒ $3 = A\cdot(-1)^2$ ⇒ $\boxed{A=3}$

Si $x=1$ ⇒ $2-3+3 = C\cdot 1$ ⇒ $\boxed{C=2}$

Igualant coef. de grau màxim (x^2) ⇒ $\left.\begin{array}{l} 2 = A+B \\ 2 = 3+B \end{array}\right\}$ ⇒ $\boxed{B=-1}$

$$I = \int \frac{3}{x}\,dx + \int \frac{-1\,dx}{x-1} + \int \frac{2\,dx}{(x-1)^2} =$$

$$= 3\ln|x| - \ln|x-1| + 2\int (x-1)^{-2}\,dx =$$

$$= \ln\left|\frac{x^3}{x-1}\right| + 2\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x^3}{x-1}\right| - \frac{2}{x-1} + C \qquad \forall C \in \mathbb{R}$$

2 d) $\int x\, e^{7x}\, dx =$

INTEGREM per PARTS

$u = x \qquad u' = 1$

$v' = e^{7x} \qquad v = \int e^{7x} dx = \frac{1}{7}\int 7e^{7x} dx = \frac{1}{7} e^{7x}$

$$= \frac{x e^{7x}}{7} - \int \frac{1}{7} e^{7x}\, dx =$$

$$= \frac{x e^{7x}}{7} - \frac{1}{7}\frac{1}{7}\int 7 e^{7x}\, dx =$$

$$= \frac{x e^{7x}}{7} - \frac{e^{7x}}{49} + C = e^{7x}\left(\frac{x}{7} - \frac{1}{49}\right) + C$$

$\forall C \in \mathbb{R}$

3) Calculeu la integral següent **fent el canvi de variable x = 4 t**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$$

(2 punts)

3 $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} \overset{?}{=}$

CANVI $x = 4t \Rightarrow dx = 4\, dt$

$\sqrt{16-x^2} = \sqrt{16-(4t)^2} = \sqrt{16-16t^2} = \sqrt{16}\sqrt{1-t^2} = 4\sqrt{1-t^2}$

$$= \int \frac{\cancel{4}\, dt}{\cancel{4}\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(t) + C = \arcsin\left(\frac{x}{4}\right) + C$$

$t = \frac{x}{4} \qquad \forall C \in \mathbb{R}$

4) Enuncieu i demostreu la Regla de Barrow (2n teorema fonamental del càlcul integral).

(1 punt)

2n Teorema Fonamental del càlcul integral (Regla de Barrow)

f(x) funció contínua en [a,b]
G(X) és una primitiva de f(x)

$$\left.\right\} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Demostració

Recordem el 1r Teorema fonamental del càlcul integral

Si f(x) és una funció contínua en [a,b]
definim la funció $A(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \forall x \in [a,b]$ $\Longrightarrow$ A(x) és derivable i A'(x) = f(x) $\forall x \in [a,b]$

Així doncs tenim dues primitives d'una mateixa funció:

A'(x)= f(x) i G'(x)= f(x) $\forall x \in [a,b]$

Per tant podem afirmar que només es diferencien en una constant:

A(X) = G(x) + K per cert $K \in R$

En aquesta igualtat fem x=a i podrem obtenir el valor de la constant K que falta:

$$A(a) = G(a) + K \Rightarrow \int_a^a f(t)dt = G(a) + K \Rightarrow 0 = G(a) + K \Rightarrow -G(a) = K$$

I substituint a la igualtat anterior tenim que:

A(X) = G(x) –G(a) $\forall x \in [a,b]$ i si ara en aquesta darrera igualtat donem a la x el valor b

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$ Com volíem demostrar

5) Donades les corbes $\left.\begin{array}{c} y = x^3 + 3x^2 - 2 \\ y = x + 1 \end{array}\right\}$ calculeu l'àrea del recinte limitat per aquestes corbes

(1,5 punts)

(5) Com que les dues corbes són contínues només cal que trobem on es tallen i així determinarem les zona on les seva posicions relatives són constants.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 + 3x^2 - 2 \\ y = x + 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} x^3 + 3x^2 - 2 = x + 1 \\ x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0 \end{array}$$

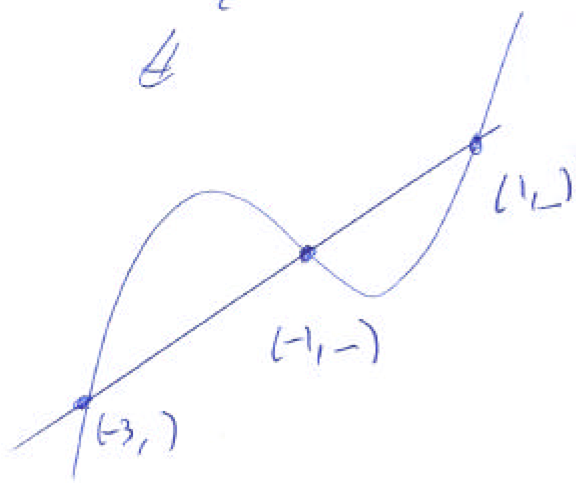
Probem de descompondre.
Probem dividir per $x-1$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & & 1 & 4 & 3 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$$(x-1)(x^2+4x+3) = (x-1)(x+1)(x+3)$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \left\langle \begin{array}{l} -2/2 = -1 \\ \frac{-6}{2} = -3 \end{array} \right.$$



$$\Rightarrow A = \left| \int_{-3}^{-1} x^3+3x^2-2-(x-1)\,dx \right| + \left| \int_{-1}^{1} (x+1)-(x^3+3x^2-2)\,dx \right| =$$

$$= \left| \int_{-3}^{-1} x^3+3x^2-x-3\,dx \right| + \left| \int_{-1}^{1} -x^3-3x^2+x+3\,dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x \right]_{-3}^{-1} \right| + \left| \left[\frac{-x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x \right]_{-1}^{1} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3 - \frac{81}{4} + 27 + \frac{9}{2} - 9 \right| +$$

$$+ \left| \frac{-1}{4} - 1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3 \right| = |4| + |4| = \underline{\underline{8 \text{ units}^2}}$$