



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

- 1) Trobeu la primitiva de la funció $f(x) = 2^x \ln(2) - 7$ i que passi pel punt (2,0)

(0,5 punts)

- 2) Calculeu les integrals següents:

a) $\int \frac{x^2 + 5}{\sqrt[3]{x^3 + 15x + 7}} dx$

b) $\int \frac{\cos(7x)}{\sin(7x)} dx$

c) $\int \frac{x^3 + 13x^2 - 12}{x^4 - 4x^2} dx$

d) $\int x^2 \ln(3x^2) dx$

(0,75 + 0,75 + 2 + 1,5 = 5 punts)

- 3) Calculeu la integral següent **fent el canvi de variable** $t = \cos^2(x)$

$$\int \frac{\cos(x)\sin(x)}{1 + \cos^4(x)} dx$$

(2 punts)

- 4) Enuncieu i demostreu el teorema fonamental del càlcul integral.

(1 punt)

- 5) Donades les corbes
$$\left. \begin{array}{l} y = x^4 - 4x^2 + 2 \\ y = x^2 - 2 \end{array} \right\}$$
 calculeu l'àrea del recinte limitat per aquestes corbes.

(1,5 punts)



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

1) Trobeu la primitiva de la funció $f(x) = 2^x \ln(2) - 7$ i que passi pel punt $(2,0)$

(0,5 punts)

$$\textcircled{1} f(x) = 2^x \ln(2) - 7$$

$$G(x) = \int f(x) dx = \int 2^x \ln(2) - 7 dx = 2^x - 7x + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

Don les primitives de $f(x)$. però com

$$G(2) = 0 \Rightarrow 2^2 - 14 + C = 0$$

$$4 - 10 + C = 0$$

$$C = 10$$

La primitiva buscada és $G(x) = 2^x - 7x + 10$

2) Calculeu les integrals següents:

a) $\int \frac{x^2 + 5}{\sqrt[3]{x^3 + 15x + 7}} dx$

b) $\int \frac{\cos(7x)}{\sin(7x)} dx$

c) $\int \frac{x^3 + 13x^2 - 12}{x^4 - 4x^2} dx$

d) $\int x^2 \ln(3x^2) dx$

(0,75 + 0,75 + 2 + 1,5 = 5 punts)

$$\textcircled{2} \text{ a) } \int \frac{x^2 + 5}{\sqrt[3]{x^3 + 15x + 7}} dx = \int (x^2 + 5) (x^3 + 15x + 7)^{-1/3} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int (3x^2 + 15) (x^3 + 15x + 7)^{-1/3} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} (x^3 + 15x + 7)^{2/3} + C =$$

$$= \frac{1}{2} (x^3 + 15x + 7)^{2/3} + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

$$\text{b) } \int \frac{\ln(7x)}{\sin(7x)} dx = \frac{1}{7} \int \frac{7 \ln(7x)}{\sin(7x)} dx = \frac{1}{7} \ln |\tan(7x)| + C$$

$$\forall C \in \mathbb{R}$$

$$c) \int \frac{x^3 + 13x^2 - 12}{x^4 - 4x^2} dx$$

- NO ZARERADIA
- FUNCIÓ RACIONAL on grau NUM < grau DENOM $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Anem a descomposen el DENOMINADOR

$$x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x+2)(x-2) \Rightarrow$$

$$\frac{x^3 - 13x^2 - 12}{x^2(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-2}$$

sumant amb el NCD dels denominadors

$$\frac{x^3 + 13x^2 - 12}{x^2(x+2)(x-2)} = \frac{A(x+2)(x-2) + Bx(x+2)(x-2) + Cx^2(x-2) + Dx^2(x+2)}{x^2(x+2)(x-2)}$$

$\Rightarrow$ Com els denominadors són iguals igualem els NUMERADORS

$$x^3 + 13x^2 - 12 = A(x+2)(x-2) + Bx(x+2)(x-2) + Cx^2(x-2) + Dx^2(x+2)$$

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow -12 = A(2)(-2) \Rightarrow \boxed{A=3}$$

$$\text{Si } x=2 \Rightarrow 8 + 13 \cdot 4 - 12 = D \cdot 4 \cdot 4 \Rightarrow 48 = D \cdot 16 \Rightarrow \boxed{D=3}$$

$$\text{Si } x=-2 \Rightarrow -8 + 13 \cdot 4 - 12 = C \cdot 4 \cdot (-4) \Rightarrow 32 = -16C \Rightarrow \boxed{C=-2}$$

$$\text{Igualant coef de grau 1 (x)} \Rightarrow 1 = B + C + D$$

$$1 = B - 2 + 3$$

$$\boxed{0=B}$$

$$I = \int \frac{3}{x^2} dx + \int \frac{-2}{x+2} dx + \int \frac{3}{x-2} dx =$$

$$= 3 \int x^{-2} dx - 2 \int \frac{dx}{x+2} + 3 \int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= \frac{3x^{-1}}{-1} - 2 \ln|x+2| + 3 \ln|x-2| + C =$$

$$= \frac{-3}{x} + \ln \left| \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2} \right| + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

$$d) \int x^2 \ln(3x^2) dx$$

INTEGREN PER PARTS

$$\begin{aligned} u' &= x^2 & \Rightarrow u &= \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \\ v &= \ln(3x^2) & \Rightarrow v' &= \frac{6x}{3x^2} = \frac{2}{x} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^3 \ln(3x^2)}{3} - \int \frac{x^3}{3} \frac{2}{x} dx =$$

$$= \frac{x^3 \ln(3x^2)}{3} - \frac{2}{3} \int x^2 dx =$$

$$= \frac{x^3 \ln(3x^2)}{3} - \frac{2}{3} \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3 \ln(3x^2)}{3} - \frac{2x^3}{9} + C$$

$\forall C \in \mathbb{R}$

3) Calculeu la integral següent **fent el canvi de variable** $t = \cos^2(x)$

$$\int \frac{\cos(x) \sin(x)}{1 + \cos^4(x)} dx$$

(2 punts)

③ $\int \frac{\cos x \sin x}{1 + \cos^4 x} dx$

CANVI
 $t = \cos^2 x \Rightarrow dt = 2 \cos x (-\sin x) dx \Rightarrow$
 $\frac{-dt}{2} = \cos x \sin x dx$
 $1 + \cos^4 x = 1 + t^2$

$$= \int \frac{-dt}{2} \frac{1}{1+t^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \arctan(t) + C = -\frac{1}{2} \arctan(\cos^2 x) + C$$

$\forall C \in \mathbb{R}$

RESULTAT d'CANVI

4) Enuncieu i demostreu el teorema fonamental del càlcul integral.

(1 punt)

Teorema fonamental del càlcul integral

Si $f(x)$ és una funció contínua en $[a,b]$

definim la funció $A(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow$ $A(x)$ és derivable i
 $A'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

Demostració:

$\forall x \in [a,b]$ **anem a veure si existeix $A'(x)$**

$$\begin{aligned} A'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \end{aligned}$$

Però pel Teorema del Valor mitjà del càlcul integral sabem que $\exists c \in [x, x+h]$ tal

que $\int_x^{x+h} f(t) dt = f(c)(x+h-x) = f(c)h$

Així doncs tenim que

$$A'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c) \cdot h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c)$$

però com $c \in [x, x+h]$ resulta que quan fem el $\lim_{h \rightarrow 0}$

obtenim que $c \in [x, x] \Rightarrow c = x$ amb la qual cosa tenim que

$A'(x) = f(x)$

Com volíem demostrar.

- 5) Donades les corbes
$$\left. \begin{array}{l} y = x^4 - 4x^2 + 2 \\ y = x^2 - 2 \end{array} \right\} \text{ calculeu l'àrea del recinte limitat per aquestes corbes.}$$

⑤ Com les dues corbes són contínues mentre cal que trobem on es tallen i així determinarem les zones on la seva posició relativa són constants.

$$\left. \begin{array}{l} y = x^4 - 4x^2 + 2 \\ y = x^2 - 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^4 - 4x^2 + 2 = x^2 - 2 \\ x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \end{array}$$

Equació que es pot solucionar pel mètode de la quadràdica o descomponent per RUFFINI

Si $z = x^2$

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ z = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{array} \right.$$

Problema dividit.

$$Q(x) = x^4 - 5x^2 + 4 \text{ per } x - a \text{ on } a = \pm 1, \pm 2, \pm 4$$

$$\left. \begin{array}{l} Q(1) = 0 \\ Q(-1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x - 1 \\ x + 1 \end{array}$$

ⓐ

	1	0	-5	0	4
1		1	1	-4	-4
	1	1	-4	-4	0
-1		-1	0	4	
	1	0	-4	0	

$$Q(x) = (x-1)(x+1)(x^2-4) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$



$$\Rightarrow A = \left| \int_{-2}^{-1} (x^2-2) - (x^4-4x^2+2) dx \right| +$$

$$+ \left| \int_{-1}^1 (x^2-2) - (x^4-4x^2+2) dx \right| +$$

$$+ \left| \int_1^2 (x^2-2) - (x^4-4x^2+2) dx \right| =$$

$$= \left| \int_{-2}^{-1} -x^4 + 5x^2 - 4 dx \right| + \left| \int_{-1}^1 -x^4 + 5x^2 - 4 dx \right| + \left| \int_1^2 -x^4 + 5x^2 - 4 dx \right| =$$

$$= \left| \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{5x^3}{3} - 4x \right]_{-2}^{-1} \right| + \left| \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{5x^3}{3} - 4x \right]_{-1}^1 \right| + \left| \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{5x^3}{3} - 4x \right]_1^2 \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4 - \frac{32}{5} + \frac{40}{3} - 8 \right| + \left| \frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4 + \frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4 \right| +$$

$$+ \left| \frac{-32}{5} + \frac{40}{3} - 8 + \frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4 \right| = \left| \frac{22}{15} \right| + \left| \frac{76}{15} \right| + \left| \frac{22}{15} \right| = \frac{120}{15} = 8 \text{ m}^2$$

= 8 m^2

COM LES FUNCIONS SÓN PAREL·LES es poden haver fet
UTILITZANT aquesta SÍMETRIA

$$A = 2 \left| \int_0^1 f(x) - g(x) dx \right| + 2 \left| \int_1^2 f(x) - g(x) dx \right|$$

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \left[\int_0^1 (x^4 - 4x^2 + 2 - (x^2 - 2)) dx + \int_1^2 ((x^2 - 2) - (x^4 - 4x + 2)) dx \right] = \\
 &= 2 \left[\left[\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x \right]_0^1 + \frac{22}{15} \right] = 2 \left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4 + \frac{22}{15} \right) = \\
 &= 2 \cdot 4 = 8 \text{ units}^2
 \end{aligned}$$

