



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

1) Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 - \sin x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 3x - 14}{-7x^2} =$

(3,5 punts)

2) Demuestra que l'equació $x^{13} + 13x + 2007 = 0$ té exactament una única solució real.
(1,5 punts)

3) Calculeu:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x-2}} =$

b) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3} dx =$

c) $\int \frac{2x - \sqrt{x}}{x^2} dx =$

d) $\int \frac{dx}{25 + 7x^2} =$

e) $\int \cos^3 x \cdot \sin x dx =$

(5 punts)



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

1) Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 - \sin x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 3x - 14}{-7x^2} =$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 - \sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \cos x}{2x - \cos x} = \frac{1}{-1} = -1$

és a dir, amb una aplicació de l'Hôpital fet!

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{3x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{3} = \frac{-1}{3}$

és a dir, amb parell d'aplicacions de l'Hôpital fet!

c) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = (1^\infty)$. Agafem logaritmes i així si anomenem al límit buscat $A = \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ calculem el $\ln A$.

$$\ln(A) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln \left(x^{\frac{1}{1-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$$

Per tant el límit si $\ln A = -1$ aleshores

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 3x - 14}{-7x^2} = \left(\frac{+\infty}{-\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x} + 3}{-14x} = \left(\frac{+\infty}{-\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^{2x}}{-14} = -\infty$

és a dir, amb parell d'aplicacions de l'Hôpital fet!

(0,5+1·3=3,5 punts)

2) Demuestra que l'equació $x^{13} + 13x + 2007 = 0$ té exactament una única solució real.

(1,5 punts)

Existència pel T. de Bolzano aplicat a $f(x) = x^{13} + 13x + 2007$ a l'interval $[-2, 0]$

Unicitat observant que $f'(x)$ no s'anul·la mai a $\mathbb{R}$ i aplicant el T. de Rolle

Un raonament detallat el teniu en aquesta resposta:

$$2) \quad g(x) = x^{13} + 13x + 2007 = 0$$

Demostar que té una única solució real:

EXISTÈNCIA: Sigui $f(x) = x^{13} + 13x + 2007$

T. BOLZANO:

$$\left. \begin{array}{l} g(x) \text{ CONT en } [-2, 0] \\ g(0) > 0 \\ g(-2) < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{T.B.} \\ \downarrow \\ \Rightarrow \exists c \in (-2, 0) \mid g(c) = 0 \end{array}$$

UNIGITAT:

Hipòtesis: Si existís un altre punt $d \neq c \in \mathbb{R} \mid g(d) = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} g(x) \text{ CONT en } [c, d] \\ g(x) \text{ DERIVABLE en } (c, d) \\ g(c) = g(d) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{T. ROLLE} \\ \Rightarrow \exists m \in (c, d) \mid g'(m) = 0 \end{array}$$

$$g'(x) = 13x^{12} + 13$$

$$g'(x) = 0$$

$$13x^{12} + 13 = 0$$

$$13x^{12} = -13$$

$$x^{12} = -1$$

$$\sqrt[12]{x^{12}} = \sqrt[12]{-1}$$

$x = \nexists$ pq l'arrel parell d'un nombre negatiu no existeix.

com que no hi ha cap $x \mid g'(x) = 0$ i sabem que hi ha algun punt la imatge del qual és 0, podem afirmar que aquest punt és únic i que per tant l'equació plantejada té una única solució real.

3) Calculeu:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x-2}}$

b) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx$

c) $\int \frac{2x-\sqrt{x}}{x^2} dx$

d) $\int \frac{dx}{25+7x^2} =$

e) $\int \cos^3 x \cdot \sin x dx =$

(5 punts)

a) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x-2}} = \int (5x-2)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{5} \int 5 (5x-2)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{5} \frac{(5x-2)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + k = \frac{3}{10} \sqrt[3]{(5x-2)^2} + k$

b) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+3} dx = \frac{1}{2} \ln |e^{2x}+3| + k$

c) $\int \frac{2x-\sqrt{x}}{x^2} dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x^2} \right) dx = \int \left(\frac{2}{x} - x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = 2 \ln|x| - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + k = 2 \ln|x| + \frac{2}{\sqrt{x}} + k$

d)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{25+7x^2} &= \int \frac{\frac{1}{25}}{\frac{25+7x^2}{25}} dx = \frac{1}{25} \int \frac{dx}{1+\frac{7x^2}{25}} = \frac{1}{25} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{\sqrt{7}x}{5}\right)^2} = \frac{1}{25} \frac{5}{\sqrt{7}} \int \frac{\frac{\sqrt{7}}{5} dx}{1+\left(\frac{\sqrt{7}x}{5}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{5\sqrt{7}} \arctg\left(\frac{\sqrt{7}x}{5}\right) + k = \frac{\sqrt{7}}{5(\sqrt{7})^2} \arctg\left(\frac{\sqrt{7}x}{5}\right) + k = \frac{\sqrt{7}}{35} \arctg\left(\frac{\sqrt{7}x}{5}\right) + k \end{aligned}$$

e) $\int \cos^3 x \cdot \sin x dx = -\int \cos^3 x \cdot (-\sin x) dx = \frac{-\cos^4 x}{4} + k$