Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
Institut d'Educació Secundària
Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
2n BATX MA
L'Hôpital, T. Rolle, T. Valor Mitjà i
Integrals immediates

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Calculeu els límits següents:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos(2x)}$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3 \cdot \ln(3x)}{2 \cdot \ln(2x)}$

c) $\lim\limits_{x \to 1^-} (2 - 2x)^{x-1}$

d) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{4x^2 - 8x + 3} =$

(3,5 punts)

2) Enunicieu i demostreu el Teorema de Lagrange (=Teorema del Valor mitjà del càlcul diferencial).

(1,5 punts)

3) Calculeu:

a) $\displaystyle\int \frac{\sin(3x)}{\cos^3(3x)} dx =$

b) $\displaystyle\int \frac{2}{(1+x^2) \cdot arctag(x)} \quad dx =$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt[3]{x^2}} + p \right) \quad dx =$

d) $\displaystyle\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1 - x^4}} =$

e) $\displaystyle\int e^{7x^2+2x+2007} (7x+1) dx =$

(5 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Calculeu els límits següents:

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos(2x)} \underset{(1)}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{2x}{2\cdot\sin(2x)} \underset{(1)}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 2\cdot\cos(2x)}=\frac{1}{2}$$

(1) És una indeterminació 0/0 a la qual li podem aplicar l'Hôpital.

b) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{3\cdot\ln(3x)}{2\cdot\ln(2x)} \underset{(2)}{\overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{3\cdot\frac{3}{3x}}{2\cdot\frac{2}{2x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

(2) És una indeterminació a la qual li podem aplicar l'Hôpital.

c) $$L=\lim_{x\to 1^-}(2-2x)^{x-1}=0^0$$

Com és un indeterminació 0^0 apliquem ln i calcularem aquest límit ln(L)

$$\ln(L)=\lim_{x\to 1^-}\ln\left((2-2x)^{x-1}\right)=\lim_{x\to 1^-}(x-1)\cdot\ln(2-2x) \underset{(3)}{\overset{0\cdot(-\infty)}{=}} \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(2-2x)}{\frac{1}{(x-1)}} \underset{(4)}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$$

(3) Transformen a una indeterminació on puguem aplicar l'Hôpital
(4) És una indeterminació a la qual li podem aplicar l'Hôpital.

$$\ln(L)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{-2}{2-2x}}{\frac{-1}{(x-1)^2}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-2\cdot(x-1)^2}{-1\cdot(2-2x)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-2\cdot(x-1)^2}{2\cdot(x-1)}=\lim_{x\to 1^-}-(x-1)=0^+$$

$$L=e^0=1$$

d) $$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x^3-5x^2-4x+3}{4x^2-8x+3} \underset{(5)}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{6x^2-10x-4}{8x-8}=\frac{\frac{-15}{2}}{-4}=\frac{15}{8}$$

(5) És una indeterminació 0/0 a la qual li podem aplicar l'Hôpital

(1+0,75+1+0,75=3,5 punts)

2) Enunicieu i demostreu el Teorema de Lagrange (=Teorema del Valor mitjà del càlcul diferencial).

(1,5 punts)

Teoria

3) Calculeu:

a) $$\int\frac{\sin(3x)}{\cos^3(3x)}dx=\frac{1}{-3}\int\left(-3\sin(3x)\right)\cos^{-3}(3x)dx=\frac{-1}{3}\frac{\cos^{-2}(3x)}{-2}+k=\frac{1}{6\cdot\cos^2(3x)}+k$$

b) $\int \frac{2}{(1+x^2)\cdot arctag(x)} \quad dx = 2\int \frac{1}{(1+x^2)\cdot arctag(x)} \quad dx = 2\ln\left|arctag(x)\right| + K$

c) $\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x\sqrt[3]{x^2}}+p\right) \quad dx = \int\left(x^{-2}+4x^{\frac{-5}{3}}+p\right) \quad dx = \frac{x^{-1}}{-1}+\frac{4\cdot x^{\frac{-2}{3}}}{\frac{-2}{3}}+p\,x+k = \frac{-1}{x}-\frac{6}{\sqrt[3]{x^2}}+p\,x+k$

d) $\int \frac{x\cdot dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\cdot dx}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin(x^2)+k$

e) $\int e^{7x^2+2x+2007}\,(7x+1)\,dx = \frac{1}{2}\int e^{7x^2+2x+2007}\,(14x+2)\,dx = \frac{1}{2}e^{7x^2+2x+2007}+K$

(5 punts)