Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
Institut d'Educació Secundària
Jaume Balmes

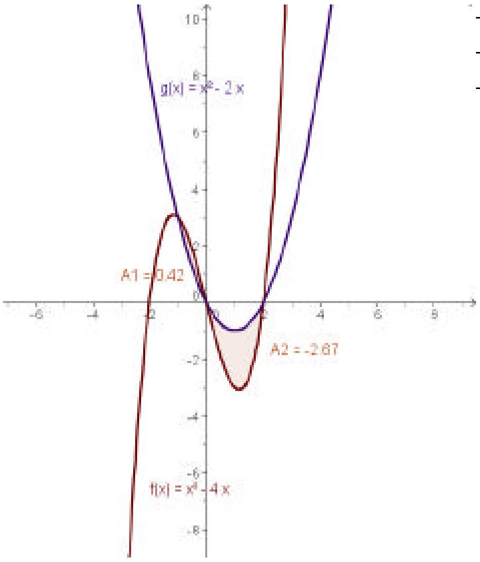
Departament de Matemàtiques
2n BATX MA
Optimització i càlcul integral

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Considereu la zona tancada per les corbes $y = x^3 - 4x$ i $y = x^2 - 2x$
   a) Calculeu l'àrea de la superfície d'aquesta zona
   b) Calculeu el volum del cos de revolució que s'obté en fer girar aquesta zona al voltant de l'eix OX

(2,5+2=4,5 punts)

a) Si tallem les dues corbes resulta que es tallen en els punts de x = –1,0,2



-1		0		2
0	ZONA 1	0	ZONA 2	0

$$A_1 = \left| \int_{-1}^{0} (x^3 - 4x - x^2 + 2x)\,dx \right| =$$

$$A_2 = \left| \int_{0}^{2} (x^2 - 2x - x^3 + 4x)\,dx \right| =$$

Àrea total = $A_1 + A_2 = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12} u^2$

b) Per calcular el volum hem de tenir en compte quina és la corba que està més lluny de l'eix de gir i quina la que està més a prop.

$$V = \pi \int_{-1}^{2} (x^3 - 4x)^2 - (x^2 + 2x)^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{2} (x^6 - 9x^4 + 4x^3 + 12x)\,dx =$$

$$= \frac{351\pi}{35} u^3$$

2) EnunciEU i demostreu la Regla de Barrow (2n teorema fonamental del càlcul integral).

(1 punt)

3) Calculeu:

a) $\int \frac{x+2}{x^4 - x^2} \, dx =$

$\frac{x+2}{x^4 - x^2} = \frac{x+2}{x^2(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1}$ *solucionant* $A = -2,\ B = -1,\ C = \frac{-1}{2}$ *i* $D = \frac{3}{2}$

Així doncs la integral és:

$$\int \frac{x+2}{x^4 - x^2} \, dx = \frac{2}{x} - \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + K$$

b) $\int x^2 \cos x \, dx =$

Aplicant parts
u = x^2 ====> u ' = 2 x
v ' = cos(x) ===> v = sin(x) La integral és = $x^2 \sin(x) - \int 2x \cdot \sin(x)\,dx =$
Tornant a aplicar parts

u = 2x ===> u ' = 2
v ' = sin(x) ===> v = –cos(x)   La integral és =
$= x^2\sin(x) - \int 2x\cdot\sin(x)dx \quad = x^2\sin(x) - \left(-2x\cos(x) - \int -2\cos(x)dx\right) \quad = x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + K$

(3 punts)

4) Calcula el valor del paràmetre a , $a > 0$, per tal que l'àrea del recinte del pla limitat per la corba $y = x^3$ i la recta $y = ax$ sigui 8.

(1,5 punt)

Tallant les corbes obtenim que es tallen per x=0 i x=$\pm\sqrt{a}$

Així doncs l'àrea és = $\left|\int_{-\sqrt{a}}^{0}\left(x^3 - ax\right)dx\right| + \left|\int_{0}^{+\sqrt{a}}\left(ax - x^3\right)dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - a\frac{x^2}{2}\right]_{-\sqrt{a}}^{0}\right| + \left|\left[a\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{\sqrt{a}}\right| =$

$= \left|0 - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}\right| + \left|\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} - 0\right| = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$

i igualant això a 8 obtenim:

$\frac{a^2}{2} = 8$

$a^2 = 16$

$a = \pm 4$

Però com l'enunciat diu que a>0 la solució és **a=4**