Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
Institut d'Educació Secundària
Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
2n BATX MA
Càlcul integral

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Integreu les següents funcions:

   a) $\int \frac{x^3+1}{x^2-5x+4} \quad dx =$

   b) $\int \frac{3x+1}{(x-1)^3} \quad dx =$

   c) $\int \left(x^2-1\right) \quad e^x \quad dx \quad =$

(4 punts)

2) Enuncieu i demostreu el 1r teorema fonamental del càlcul integral.

(1 punt)

3) Trobeu l'àrea limitada per les corbes $y = 6x - x^2$ i $y = x^2 - 2x$

(2 punts)

4) Considereu la regió del pla limitada per $y = 3x^3 - 3x$ i la recta $y = 0$. Calculeu el volum del cos de revolució que es genera en fer girar aquesta regió al voltant de l'eix OX

(1,5 punts)

5) Calculeu el valor positiu de a que fa que l'àrea compresa entre la recta d'equació $y = ax + 2a$ i la paràbola $y = ax^2$ valgui 8.

(1 punt)

6) Troba la primitiva de la funció $f(x) = 2x - \frac{3}{3}$ que passa pel punt $P(10, 2)$.

(0,5 punts)

Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
Institut d'Educació Secundària
Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
2n BATX MA
Càlcul integral

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Integreu les següents funcions:

a) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2-5x+4}\, dx =$

$$\begin{array}{r|l} x^3+1 & x^2-5\cdot x+4 \\ \cline{2-2} \ddots & x+5 \\ 21\cdot x-19 & \end{array}$$

$\dfrac{x^3+1}{x^2-5x+4} = x+5+\dfrac{21x-19}{x^2-5x+4}$ i a més tenim que $\dfrac{21x-19}{x^2-5x+4} = \dfrac{A}{x-4}+\dfrac{B}{x-1}$

$Surt\ A = \dfrac{65}{3} \quad i \quad B = \dfrac{-2}{3}$

així doncs: $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^2-5x+4}\, dx = \frac{x^2}{2}+5x+\frac{65}{3}\ln|x-4|-\frac{2}{3}\ln|x-1|+K$

b) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{(x-1)^3}\, dx =$

$\dfrac{3x+1}{(x-1)^3} = \dfrac{A}{(x-1)}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{(x-1)^3}$ *solucionant* $A=0, B=3\ i\ C=4$

així doncs la integral = $3\dfrac{(x-1)^{-1}}{-1}+4\dfrac{(x-1)^{-2}}{-2}+K = \dfrac{-3}{x-1}-\dfrac{2}{(x-1)^2}+K$

c) $\displaystyle\int (x^2-1)\ e^x\ dx = (x^2-1)\ e^x - \int 2x{\cdot}e^x\, dx =$

Aplicant parts
u = x^2-1 ===> u ' = 2 x
v ' = e^x ===> v = e^x La integral és = $(x^2-1)\ e^x - \int 2x{\cdot}e^x\, dx =$

Tornant a aplicar parts
u = 2x ===> u ' = 2
v ' = e^x ===> v = e^x La integral és =

$= (x^2-1)\ e^x - \left[2x{\cdot}e^x - \int 2\, e^x\, dx\right] = (x^2-2x-1)\ e^x + 2e^x + K = (x^2-2x+1)\ e^x + K$

(1,5 + 1,5 +1= 4 punts)

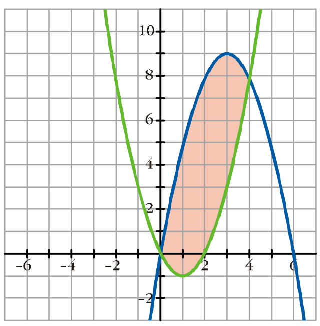
2) Enunicieu i demostreu el 1r teorema fonamental del càlcul integral.

(1 punt)

Teoria

3) Troba l'àrea limitada per les corbes $y = 6x - x^2$ i $y = x^2 - 2x$

(2 punts)



Els punts d'intersecció de totes dues corbes són:

$6x - x^2 = x^2 - 2x \;\rightarrow\; x = 0,\ x = 4 \;\rightarrow\; (0, 0)$ i $(4, 8)$

(La gràfica no és necessària; s'inclou per visualitzar millor el problema)

$$G(x)=\int\left[\left(6x-x^2\right)-\left(x^2-2x\right)\right]dx=\int\left(-2x^2+8x\right)dx=\frac{-2x^3}{3}+4x^2$$

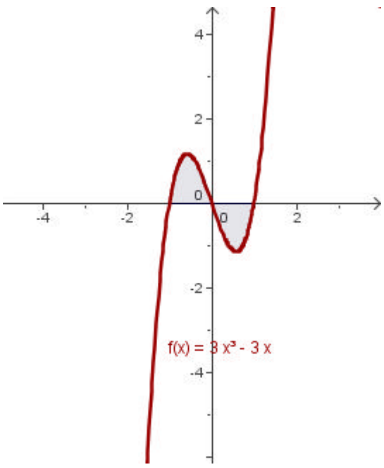
$$G(0)=0$$

$$G(4)=\frac{-128}{3}+64=\frac{64}{3}$$

$$A=G(4)-G(0)=\frac{64}{3}\ \text{u}^2$$

4) Considereu la regió del pla limitada per $y=3x^3-3x$ i la recta $y=0$. Calculeu el volum del cos de revolució que es genera en fer girar aquesta regió al voltant de l'eix OX

(1,5 punts)



Tallant les dues corbes troben els punts de tall (–1,0), (0,0) i (1,0). amb la qual cosa la zona queda clara.

$$V=p\int_{-1}^{1}\left(3x^3-3x\right)^2dx=p\int_{-1}^{1}\left(9x^6-18x^4+9x^2\right)dx=\frac{48p}{35}$$

5) Calculeu el valor positiu de a que fa que l'àrea compresa entre la recta d'equació $y=ax+2a$ i la paràbola $y=ax^2$ valgui 8.

(1 punt)

Tallant aquestes dues corbes obtenim que x=2 i x=–1

Així doncs $\int_{-1}^{2}(ax+2a-ax^2)dx=a\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx=a\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=\frac{9a}{2}$

I imposant que $\frac{9a}{2}=8$ surt que $a=\frac{16}{9}$

6) Troba la primitiva de la funció $f(x)=2x-\frac{3}{3}$ que passa pel punt $P(10,2)$.

(0,5 punt)

Les primitives són F(x)= x^2–x + K i ara imposant que F(10)=2 surt que K=–88.
Així la funció buscada és F(x)= x^2–x –88