Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Trobeu una funció F(x) si saps que F'(x)= $18x^2$ i que F(–1)=0

(0,5 punts)

2) Calculeu:

a) $\int \left(15x^2 + \frac{2}{x^2\sqrt{x}} + 2009\right) dx =$

b) $\int \frac{\ln|3x|}{x} dx =$

c) $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1-x^4}} =$

d) $\int e^{\cos(7x+2)} \sin(7x+2)\, dx =$

e) $\int x \sin(7x)\, dx =$

(4 · 1 + 1,5 = 5,5 punts)

3) Calculeu

a) $\int \frac{4x^2+x+6}{x^3+2x^2} dx =$

b) $\int \frac{4x+1}{8x^2+4x+3} dx =$

c) $\int \frac{dx}{25+4x^2} =$

(1,5+ 0,5 + 0,75 =2,75 punts)

4) Resoleu per substitució (canvi de variable)

$\int \frac{dx}{x-\sqrt[4]{x}} =$ (indicació: feu el canvi $x = t^4$)

(1,25 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Trobeu una funció F(x) si saps que F'(x)= $18x^2$ i que F(–1)=0

F(x) és una primitiva de F '(x) per tant és F (X) = $\int 18x^2\,dx = \frac{18}{3}x^3 + k = 6x^3 + k \quad \forall k \in R$

I ara imposant que F(–1) = 0 $\Rightarrow$ que –6+k=0 $\Rightarrow$ k=6

Així doncs F(X) = $6x^3 + 6 = 6(x^3+1)$

(0,5 punts)

2) Calculeu:

a) $\int\left(15x^2 + \frac{2}{x^2\sqrt{x}} + 2009\right) dx =$

$= \int\left(15x^2 + 2x^{\frac{-5}{2}} + 2009\right) dx = \frac{15}{3}x^3 + 2\frac{2}{-3}x^{\frac{-3}{2}} + 2009x + k = 5x^3 - \frac{4}{3}x^{\frac{-3}{2}} + 2009x + k$

$= 5x^3 - \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}} + 2009x + k = 5x^3 - \frac{4}{3}\frac{\sqrt{x}}{x^2} + 2009x + k \qquad \forall k \in R$

b) $\int \frac{\ln|3x|}{x}dx = \int \frac{1}{x}\ln|3x|\,dx = \int \frac{3}{3x}\ln|3x|\,dx = \frac{(\ln|3x|)^2}{2} + K \qquad \forall k \in R$

c) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + k \qquad \forall k \in R$

d) $\int e^{\cos(7x+2)}\sin(7x+2)\,dx =$

$= \frac{1}{-7}\int e^{\cos(7x+2)}(-7)\sin(7x+2)\,dx = \frac{-1}{7}e^{\cos(7x+2)} + k \qquad \forall k \in R$

e) $\int x\sin(7x)\,dx =$ I. Aquesta s'ha de solucionar pel mètode de parts

u = x $\Rightarrow$ du=dx

dv = sin(7x) dx $\Rightarrow$ v = $\int dv = \int \sin(7x)dx = \frac{1}{7}\int 7\sin(7x)dx = \frac{-1}{7}\cos(7x)$

(4 · 1 + 1,5 = 5,5 punts)

així doncs la integral inicial

$u\cdot v - \int u\,dv = \frac{-x\cdot\cos(7x)}{7} + \frac{1}{7}\int\cos(7x)\,dx = \frac{-x\cdot\cos(7x)}{7} + \frac{1}{7}\frac{1}{7}\int 7\cos(7x)\,dx =$

$= \frac{-x\cdot\cos(7x)}{7} + \frac{1}{49}\sin(7x) + K \qquad \forall k \in R$

3) Calculeu

a) $\int \frac{4x^2+x+6}{x^3+2x^2}dx =$

És una integral racional on el denominador té tots els zeros reals (un simple i l'altre doble): $x^3+2x^2 = x^2(x+2)$ així doncs la funció racional es pot escriure com suma d'aquests tres trencats:

$\frac{4x^2+x+6}{x^3+2x^2} = \frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+2} \Rightarrow$ sumant els trencats i igualant els numeradors obtenim:

$4x^2+x+6 = A(x+2)+Bx(x+2)+Cx^2$ i donant valors tenim:

Si x=0 $\Rightarrow$ 6 = 2A $\Rightarrow$ A=3

Si x=–2 $\Rightarrow$ 20 = 4 C $\Rightarrow$ C=5

I ara donant qualsevol altre valor per exemple x=1 $\Rightarrow$ 11 = 3A +3B +C $\Rightarrow$ 11=14+3B $\Rightarrow$ B= –1

Així doncs $\frac{4x^2+x+6}{x^3+2x^2} = \frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{5}{x+2}$ i separant la integral inicial com suma de les tres integrals corresponents tenim:

$$\int \frac{4x^2+x+6}{x^3+2x^2}dx = \int \frac{3}{x^2}dx - \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{5}{x+2}dx = 3\frac{x^{-1}}{-1} - \ln|x| + 5\ln|x+2| =$$

$$= \frac{-3}{x} + \ln\left|\frac{(x+2)^5}{x}\right| + k \qquad \forall k \in R$$

b) $\int \frac{4x+1}{8x^2+4x+3}dx =$ Aquesta és immediata:

$$\frac{1}{4}\int \frac{4(4x+1)}{8x^2+4x+3}dx = \frac{1}{4}\int \frac{16x+4}{8x^2+4x+3}dx = \frac{1}{4}\ln|8x^2+4x+3| + K \qquad \forall k \in R$$

c) $\int \frac{dx}{25+4x^2} =$

$$\int \frac{\frac{1}{25}dx}{\frac{25+4x^2}{25}} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{\frac{25}{25}+\frac{4x^2}{25}} = \frac{1}{25}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{2x}{5}\right)^2} = \frac{1}{25}\frac{5}{2}\int \frac{\frac{2}{5}dx}{1+\left(\frac{2x}{5}\right)^2} = \frac{1}{10}\arctan\left(\frac{2x}{5}\right)+k$$

$\forall k \in R$

(1,5+ 0,5 + 0,75 =2,75 punts)

4) Resoleu per substitució (canvi de variable)

$\int \frac{dx}{x-\sqrt[4]{x}} =$ (indicació: feu el canvi $x = t^4$)

(1,25 punts)

Si $x = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3\,dt$ i ara substituint a la Integral Inicial

$$I = \int \frac{4t^3\,dt}{t^4-t} = \int \frac{4t^3\,dt}{t(t^3-1)} = \int \frac{4t^2\,dt}{(t^3-1)} = 4\frac{1}{3}\int \frac{3t^2\,dt}{(t^3-1)} = \frac{4}{3}\ln|t^3-1| + k = \frac{4}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x}^3-1\right| + k$$

$\forall k \in R$