Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Enunicieu i demostreu el 1r teorema fonamental del càlcul integral.

(1,5 punts)

2) Calculeu l'àrea de la superfície tancada per les corbes $y = x^4 + x^3$ i $y = x^4 + x^2 + 6x$

(2,5 punts)

3) Donades les corbes $\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = 2x \\ y = x^2 \end{array}\right\}$

a) Dibuixeu el recinte limitat per aquestes tres corbes.

b) Calculeu l'àrea del recinte del pla limitat per aquestes tres corbes.

c) Calculeu el volum del cos de revolució que es genera en fer girar aquesta regió al voltant de l'eix OX

(1+1,5+2=4,5 punts)

4) Calculeu el valor de "a" , a>0, tal que l'àrea de la regió limitada per $y = x^2 + a$; l'eix OX; x=0 i x=3 sigui 18 u^2

(1,5 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Enuncieu i demostreu el 1r teorema fonamental del càlcul integral.

(1,5 punts)

Teorema fonamental del càlcul integral

Si f(x) és una funció contínua en [a,b] definim la funció $A(x)=\int_a^x f(t)dt \quad \forall x\in[a,b]$ $\Longrightarrow$ A(x) és derivable i A'(x) = f(x) $\forall x\in[a,b]$

Demostració:

$\forall x\in[a,b]$ anem a veure si existeix A'(x)

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+h}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h}f(t)dt}{h}$$

Però pel Teorema del Valor mitjà del càlcul integral sabem que $\exists c\in[x,x+h]$ tal que $\int_x^{x+h}f(t)dt=f(c)(x+h-x)=f(c)h$

Així doncs tenim que

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c)\cdot h}{h}=\lim_{h\to 0}f(c)$$

però com $c\in[x,x+h]$ resulta que quan fem el $\lim_{h\to 0}$ obtenim que $c\in[x,x]\Rightarrow c=x$ amb la qual cosa tenim que A'(x)=f(x)

Com volíem demostrar.

2) Calculeu l'àrea de la superfície tancada per les corbes $y=x^4+x^3$ i $y=x^4+x^2+6x$

(2,5 punts)

- Observeu que les dues funcions són contínues a tot R
- Si les tallen per obtenir els punts d'intersecció de les dues corbes tenim:

$$\left.\begin{array}{l} y=x^4+x^2+6x \\ y=x^4+x^3 \end{array}\right\}\Rightarrow x^4+x^2+6x=x^4+x^3\Rightarrow -x^3+x^2+6x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(-x^2+x+6)=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ -x^2+x+6=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ x=3 \\ x=-2 \end{cases}$$

- Així doncs podem afirmar que l'àrea tancada es troba en els intervals de x determinats per [–2,0] i [0,3]
- I l'àrea és

$$\left|\int_{-2}^{0} x^4+x^2+6x-\left(x^4+x^3\right)dx\right|+\left|\int_{0}^{3} x^4+x^2+6x-\left(x^4+x^3\right)dx\right|=$$

$$=\left|\int_{-2}^{0} -x^3+x^2+6x\ \ dx\right|+\left|\int_{0}^{3} -x^3+x^2+6x dx\right|=$$

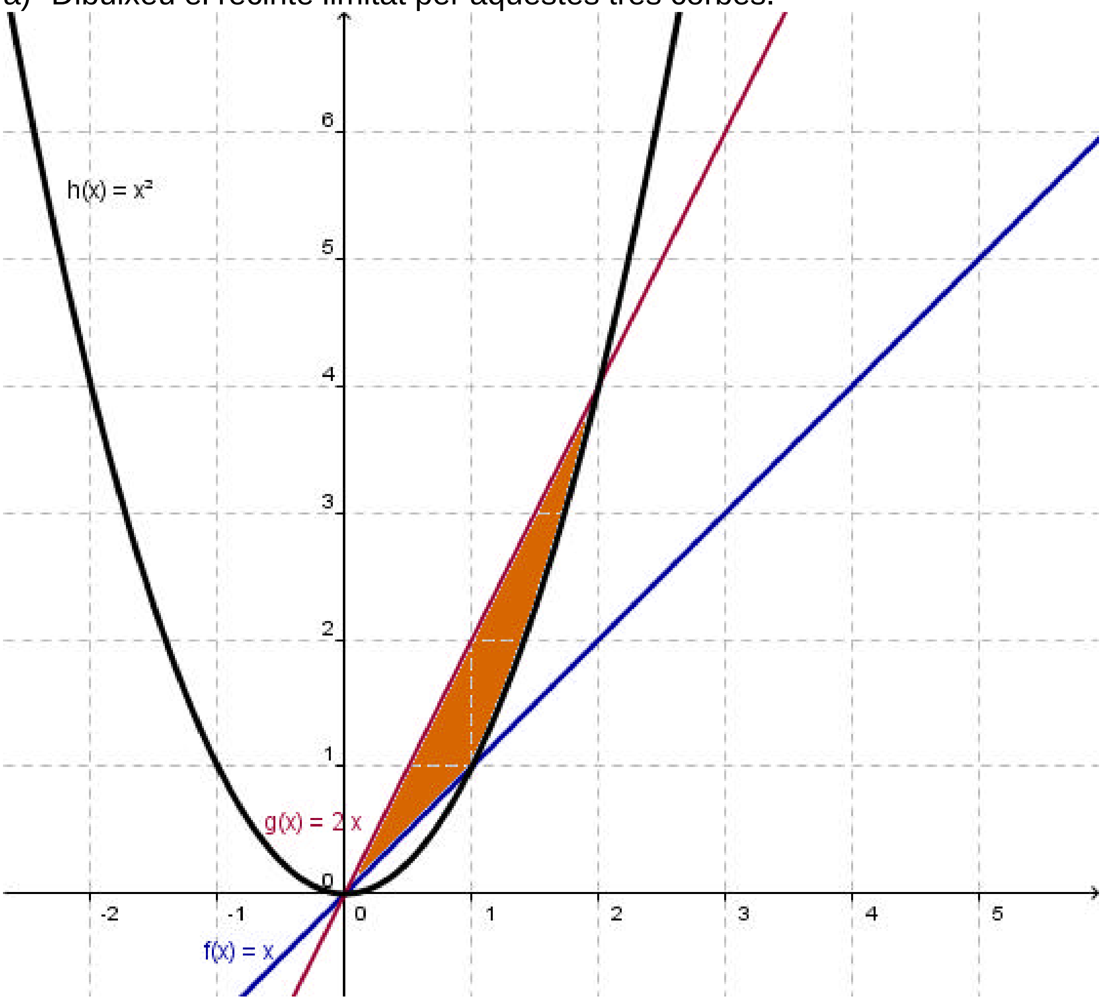
$$=\left|\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}\right]_{-2}^{0}\right|+\left|\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}\right]_{0}^{3}\right|=$$

$$=\left|0-\left(-\frac{16}{4}-\frac{8}{3}+27\right)\right|+\left|\left(-\frac{81}{4}+\frac{27}{3}+\frac{54}{2}\right)-0\right|=$$

$$=\left|4+\frac{8}{3}-27\right|+\left|-\frac{81}{4}+9+27\right|=\left|\frac{-16}{3}\right|+\left|\frac{63}{4}\right|=\frac{253}{12}u^2$$

3) Donades les corbes $\left.\begin{array}{l} y=x \\ y=2x \\ y=x^2 \end{array}\right\}$

a) Dibuixeu el recinte limitat per aquestes tres corbes.



b) Calculeu l'àrea del recinte del pla limitat per aquestes tres corbes.

Si per fer l'apartat anterior no heu calculat les interseccions 2 a 2 de les corbes, ara és obligat fer-ho. Així doncs tenim que:

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2x \Rightarrow 0 = x$$

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \ i \ x = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x \\ y = x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \ i \ x = 2$$

És a dir tenim els punts (0,0) (1,1) i (2,4) i ara ja podem calcular l'àrea que és:

$$A = \int_0^1 2x - x\,dx + \int_1^2 2x - x^2 dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 2x - x^2 dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(4 - \frac{8}{3} - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{2} + 3 - \frac{7}{3} = \frac{7}{6} u^2$$

c) Calculeu el volum del cos de revolució que es genera en fer girar aquesta regió al voltant de l'eix OX

Aquest volum s'ha de separar el dos trossos, que són els corresponents als intervals de x [0,1] i [1,2].

$$V_1 = p\int_0^1 (2x)^2 - x^2\,dx = p\int_0^1 3x^2\,dx = p\left[\frac{3x^3}{3}\right]_0^1 = p\ u^3$$

$$V_2 = \int_1^2 (2x)^2 - (x^2)^2\,dx = \int_1^2 4x^2 - x^4 dx = p\left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_1^2 =$$

$$= p\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} - \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{5}\right)\right) = p\left(\frac{28}{3} - \frac{31}{5}\right) = \frac{47p}{15} u^3$$

$$V = V_1 + V_2 = p\left(1 + \frac{47}{15}\right) = p\left(\frac{15+47}{15}\right) = \frac{62p}{15} u^3$$

També es pot calcular separant en altres trossos

$$V_3 = p\int_0^2 (2x)^2 dx = \frac{32p}{3} u^3 \qquad V_4 = p\int_0^1 (x)^2 dx = \frac{p}{3} u^3 \qquad V_5 = p\int_1^2 (x^2)^2\,dx = \frac{31p}{15} u^3$$

$$V = V_3 - V_4 - V_5 = p\left(\frac{32}{3} - \frac{1}{3} - \frac{31}{15}\right) = \frac{62p}{15} u^3$$

(1+1,5+2=4,5 punts)

4) Calculeu el valor de "a", a>0, tal que l'àrea de la regió limitada per $y = x^2 + a$; l'eix OX; x=0 i x=3 sigui 18 u^2

Com a>0 la paràbola $y = x^2 + a$ que té branques cap a dalt (1>0) a més no talla l'eix OX (Y=0).

Així doncs l'àrea de la regió és directament:

$$A = \int_0^3 x^2 + a\ dx = \left[\frac{x^3}{3} + ax\right]_0^3 = \frac{27}{3} + 3a = 9 + 3a$$

I si ara imposem que 9+3a=18 $\Rightarrow$ 3a=9 $\Rightarrow$ a=3

(1,5 punts)