



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

- 1) Estudieu la continuïtat de la funció següent. Si en algun punt no és contínua, indiqueu el tipus de discontinuïtat que presenta:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6}$$

(1 punt)

- 2) Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{x^2 + x} + x \right]$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4 \cos x}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3x - 2}{4 + 3x}$

(1,5 punts)

- 3) Trobeu els valors de **a** i **b** per a que la funció sigui derivable a tot $\mathbb{R}$ i expresseu $f'(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 & \text{si } x < 1 \\ bx + \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(1 punt)

- 4) Deriveu les funcions següents:

a) $f(x) = \cos^2(x^4 - 2)$

b) $f(x) = x^{2x}$

c) $y = 2e - 3\sqrt[5]{x^3} - \frac{3}{x^2}$

(1,5 punts)

- 5) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $y = x^3 - 14x + 23$ en el punt on $x=2$.

(0,5 punts)

- 6) Un granger vol tancar un terreny rectangular de pastura adjacent a un riu. La pastura ha de tenir 180000 m² per produir suficient farratge per al seu bestiar. Quines dimensions tindrà el terreny rectangular de forma que utilitzi la mínima quantitat de tanca, si el costat que dóna al riu no necessita ser tancat?

(1 punt)

- 7) Donada la funció

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$$

a) Determineu quin és el seu domini i si té alguna simetria de les estudiades.

b) Trobeu les seves asímptotes

c) Calculeu i simplifiqueu al màxim la primera derivada

d) Trobeu els seus extrems relatius i les zones de creixement i decreixement.

e) Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció.

(2 punts)

- 8) Calculeu les integrals:

a) $\int_0^1 \frac{4x - 2\cos x}{x^2 - \sin x} dx$

b) $\int_0^1 7 \sin(x) \cdot e^{\cos(x)+14} dx$

c) $\int_0^1 x \sin(x^2) dx$

(1,5 punts)



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

- 1) Estudia la continuïtat de la funció següent. Si en algun punt no és contínua, indica el tipus de discontinuïtat que presenta:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6}$$

(1 punt)

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6} = \frac{x(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+2)}$$

- Domini = $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$

$f(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$. Vegem el tipus de discontinuïtat que hi ha en $x = -2$ i en $x = 3$:

- En $x = -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

Hi ha una discontinuïtat asimptòtica en $x = -2$.

- En $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+1)}{x+2} = \frac{12}{5}$$

Hi ha una discontinuïtat evitable en $x = 3$.

- 2) Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{x^2 + x} + x \right]$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4 \cos x}{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2}{4 + 3x}^{x+1}$

(1,5 punts)

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{x^2 + x} + x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 - x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - x)(\sqrt{x^2 - x} + x)}{\sqrt{x^2 - x} + x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2x} = \frac{-1}{2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4 \cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \right)^* = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right)^* = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x}{1} = 2$

* Hem aplicat la regla de L'Hôpital.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x - 2}{4 + 3x} \right)^{x+1} = (1^+)^{\infty}$; sigui $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x - 2}{4 + 3x} \right)^{x+1}$

$$\ln(A) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \cdot \ln \left(\frac{3x - 2}{4 + 3x} \right) = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{3x - 2}{4 + 3x} \right)}{\frac{1}{x+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)^* = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(4+3x)}{3x-2} \cdot \frac{3 \cdot (4+3x) - (3x-2) \cdot 3}{(4+3x)^2}}{\frac{-1}{(x+1)^2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-(x+1)^2(12+6)}{(3x-2)(4+3x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-18x^2}{(3x) \cdot (3x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-18x^2}{9x^2} = -2$$

$\ln A = -2$ aleshores $A = e^{-2}$

* Hem aplicat la regla de L'Hôpital

- 3) Trobeu els valors de **a** i **b** per a que la funció sigui derivable a tot $\mathbb{R}$ i expresseu $f'(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 & \text{si } x < 1 \\ bx + \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(1 punt)

• Continuitat:

– En $x \neq 1$: $f(x)$ és contínua, ja que està formada per funcions contínues.

– En $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 + ax) = 1 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (bx + \ln x) = b \\ f(1) = b \end{cases}$$

Perquè $f(x)$ sigui contínua en $x = 1$, cal que $b = 1 + a$.

• Derivabilitat:

– Si $x \neq 1$: $f(x)$ és derivable, i la seva derivada és:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2ax & \text{si } x < 1 \\ b + \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

– En $x = 1$: Perquè $f(x)$ sigui derivable en $x = 1$, han de ser iguals les derivades laterals:

$$\begin{cases} f'(1^-) = 3 + 2a \\ f'(1^+) = b + 1 \end{cases} \quad 3 + 2a = b + 1$$

– Per tant, $f(x)$ serà derivable en $\mathbb{R}$ quan:

$$\begin{cases} b = 1 + a \\ 3 + 2a = b + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

• Derivada per aquests valors $a = -1$ i $b = 0$ és $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- 4) Deriveu les funcions següents:

a) $f(x) = \cos^2(x^4 - 2)$ b) $f(x) = x^{2x}$

c) $y = 2e - 3\sqrt[5]{x^3} - \frac{3}{x^2}$

a) $y' = 2\cos(x^4 - 2) \cdot (-\sin(x^4 - 2)) \cdot 4x^3 = -8x^3 \cos(x^4 - 2) \cdot \sin(x^4 - 2)$

b) $y = (x)^{2x} \quad \textcircled{R} \quad \ln y = \ln(x)^{2x} \quad \textcircled{R} \quad \ln y = 2x \ln(x)$

$$\frac{y'}{y} = 2\ln(x) + 2x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = x^{2x} \cdot [2\ln(x) + 2]$$

c) $y' = 0 - 3\frac{x^{-\frac{2}{5}}}{5} - 3(-2)x^{-3} = \frac{-9x^{-\frac{2}{5}}}{5} + 6x^{-3} = \frac{-9}{5\sqrt[5]{x^2}} + \frac{6}{x^3}$

(1,5 punts)

- 5) Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $y = x^3 - 14x + 23$ en el punt on $x=2$

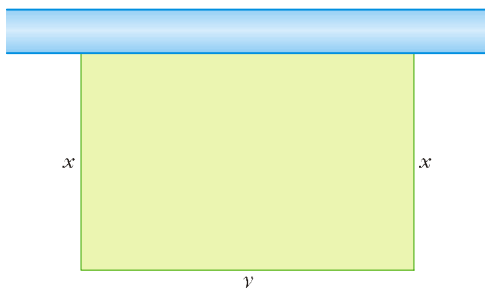
(0,5 punts)

el punt de tangència és $(2, f(2)) = (2, 3)$ i el pendent de la recta tangent és $f'(2)$ i com $f'(x) = 3x^2 - 14$ aleshores $f'(2) = 12 - 14 = -2$

Així doncs la recta tangent és $y - 3 = -2(x - 2) \Rightarrow y = 3 - 2x + 4 \Rightarrow y = -2x + 7$

- 6) Un granger vol tancar un terreny rectangular de pastura adjacent a un riu. La pastura ha de tenir 180000 m² per produir suficient farratge per al seu bestiar. Quines dimensions tindrà el terreny rectangular de forma que utilitzi la mínima quantitat de tanca, si el costat que dóna al riu no necessita ser tancat?

(1 punt)



$$\text{Àrea} = xy = 180000 \text{ m}^2 \rightarrow y = \frac{180000}{x}$$

Quantitat de tanca necessària:

$$f(x) = 2x + y = 2x + \frac{180000}{x}, \quad x > 0$$

Busquem $x > 0$ que faci $f(x)$ mínima:

$$f'(x) = 2 - \frac{180000}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 180000 = 0 \rightarrow x^2 = 90000 \rightarrow \begin{cases} x = -300 \text{ (no val)} \\ x = 300 \end{cases}$$

Vegem que en $x = 300$ hi ha un mínim:

$$f''(x) = \frac{360000}{x^3}; \quad f''(300) > 0 \rightarrow \text{hi ha un mínim}$$

Per tant, han de ser: $x = 300$ m, $y = 600$ m

- 7) Donada la funció $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$

- Determineu quin és el seu domini i si té alguna simetria de les estudiades.
- Trobeu les seves asímptotes
- Calculeu i simplifiqueu al màxim la primera derivada
- Trobeu els seus extrems relatius i les zones de creixement i decreixement.
- Fer un dibuix aproximat de la gràfica de la funció.

(2 punts)

- Domini = $\mathbb{R} - \{0\}$
- Simetries:
 $f(-x) = -f(x)$. És imparell: simètrica respecte a l'origen.
- Asímptotes verticals:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= -\infty \end{aligned} \right\} x = 0 \text{ és asímptota vertical.}$$
- Asímptota horitzontal:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 0 \quad (\text{si } x \rightarrow -\infty, f(x) < 0) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 0 \quad (\text{si } x \rightarrow +\infty, f(x) > 0) \end{aligned} \right\} y = 0 \text{ és asímptota horitzontal.}$$

- Punts singulars. Creixement i decreixement:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x^3 - (x^2 - 1) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2x^4 - 3x^4 + 3x^2}{x^6} = \frac{-x^4 + 3x^2}{x^6} = \frac{x^2(-x^2 + 3)}{x^6} = \frac{3 - x^2}{x^4}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Signe de $f'(x)$:

$$\begin{array}{ccccccc} f' < 0 & & f' > 0 & & f' > 0 & & f' < 0 \\ & \searrow & & \nearrow & & \nearrow & & \searrow \\ & -\sqrt{3} & & 0 & & \sqrt{3} & & \end{array}$$

$f(x)$ és decreixent en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$; és creixent en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3})$.

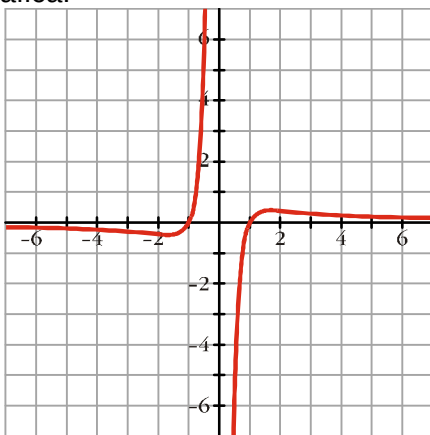
Té un mínim en $(-\sqrt{3}; -0,38)$ i un màxim en $(\sqrt{3}; 0,38)$.

- Talls amb els eixos:

– No talla l'eix Y , ja que en $x = 0$ no està definida.

– Amb l'eix $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow$ Punts $(-1, 0)$ i $(1, 0)$.

- Gràfica:



8) Calculeu les integrals:

a) $\int \frac{4x - 2\cos x}{x^2 - \sin x} dx$

b) $\int 7\sin(x) \cdot e^{\cos(x)+14} dx$

c) $\int x \sin(x^2) dx$

(1,5 punts)

Solució:

a) $\int \frac{4x - 2\cos x}{x^2 - \sin x} dx = \int \frac{2(2x - \cos x)}{x^2 - \sin x} dx = 2 \ln |x^2 - \sin x| + k$

b) $\int 7\sin(x) \cdot e^{\cos(x)+14} dx = -7 \int -\sin(x) \cdot e^{\cos(x)+14} dx = -7 \cdot e^{\cos(x)+14} + k$

c) $\int (x+2) \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int 2x \sin(x^2) dx = \frac{-\cos(x^2)}{2} + k$