Generalitat de Catalunya
Departament d’Educació
Institut d’Educació Secundària
Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
2n BATX MA
Examen 1r quadrimestre

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Calculeu els límits següents:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{6x^2+6x-36}{3x^3-9x-6}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2-x}-x\right]$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-2x^2+10}{\sqrt{3}\,e^x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5x+2}{1+5x}\right)^{2x}$

(4 punts)

2) Raona si l'equació $\sin(x)+2x+1=0$ té alguna arrel real (x en radians).
Si la resposta és afirmativa, determina un interval d'amplitud menor que 2 en el que es trobi una arrel.

(2 punts)

3) Donada la funció $f(x)=\begin{cases} 2x+a & si \quad x\le 0 \\ 4x^2+bx-8 & si \quad x>0 \end{cases}$

a) Per a quins valors dels paràmetres ***a*** i ***b*** la funció és continua i derivable a tot R?
b) Per aquests valors trobats expresseu la funció f ' (x).

(1,5+0,5=2 punts)

4) Trobeu les rectes tangents a la gràfica de la funció $y=\dfrac{8}{x-2}$ que siguin paral·leles a la recta r: Y+2X=0

(2 punts)

5) Deriveu les funcions següents:
a) $y=(3x)^{\cos(x)}$
b) $y=\sqrt{\ln(\sin(x))}$
c) $y=\dfrac{2^x\sqrt{2}\,x}{\sqrt{x}}$

(3 punts)

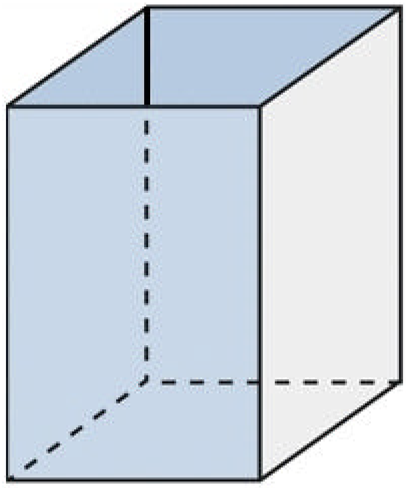
6) Donada la funció $y=\dfrac{x^2+1}{x}$

a) Quin és el seu domini?
b) Trobeu les seves asímptotes
c) Trobeu els seus extrems relatius i les zones de creixement i decreixement.
d) Feu un dibuix aproximat de la seva gràfica.

(0,5+1+2,5+1=5 punts)

7) Volem construir una caixa de 8 dm^3 de capacitat, amb forma de prisma recte de base quadrada i sense tapa superior.

Calculeu les dimensions de la caixa perquè la superfície exterior sigui mínima.



(3 punts)

8) Calculeu les integrals següents:

a) $\int \frac{x^2 e^{5x^3}}{4} dx$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{1-81x^2}} dx$

c) $\int \frac{3x+19}{3x^2+3x-18} dx$

d) $\int \arctan(3x)\, dx$

(4 punts)

Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
Institut d'Educació Secundària
Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
2n BATX MA
Examen 1r quadrimestre

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Calculeu els límits següents:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{6x^2+6x-36}{3x^3-9x-6}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2-x}-x\right]$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-2x^2+10}{\sqrt{3}\,e^x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5x+2}{1+5x}\right)^{2x}$

(4 punts)

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{6x^2+6x-36}{3x^3-9x-6} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{6\cancel{(x-2)}(x+3)}{\cancel{(x-2)}\,3(x^2+2x+1)} = \dfrac{30}{3\cdot 9} = \dfrac{10}{9}$

també es pot fer per l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 2} \frac{6x^2+6x-36}{3x^3-9x-6} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2} \frac{12x+6}{9x^2-9} = \frac{30}{36-9} = \frac{30}{27} = \frac{10}{9}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2-x}-x\right] = \infty - \infty = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x^2-x}-x\right]\dfrac{\left[\sqrt{x^2-x}+x\right]}{\left[\sqrt{x^2-x}+x\right]} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\cancel{x^2}-x-\cancel{x^2}\right]}{\left[\sqrt{x^2-x}+x\right]} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{2x} = \frac{-1}{2}$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-2x^2+10}{\sqrt{3}\,e^x} = \dfrac{\infty}{\infty}$ i això és pot solucionar per comparació d'infinits o per l'Hôpital

<u>OPCIÓ I:</u>
Com l'ordre de l'infinit e^x és major que l'ordre de les potències x^n aleshores resulta que l'infinit del denominador es major que el del numerador per tant:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2+10}{\sqrt{3}\,e^x} = 0^+$$

<u>OPCIÓ II</u>
Si es vol solucionar per l'Hôpital cal aplicar la regla varies vegades successivament:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2+10}{\sqrt{3}\,e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-4x}{\sqrt{3}\,e^x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x-4}{\sqrt{3}\,e^x} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{\sqrt{3}\,e^x} = \frac{6}{+\infty} = 0^+$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+2}{1+5x}\right)^{2x} = 1^{+\infty}$ així doncs anem a fabricar el límit que ens dóna el nombre e

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x+2}{1+5x}\right)^{2x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5x+2}{1+5x}-1\right)^{2x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5x+2-1-5x}{1+5x}\right)^{2x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1+5x}\right)^{2x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1+5x}\right)^{2x\frac{1+5x}{1+5x}} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{1+5x}\right)^{1+5x}\right]^{\frac{2x}{1+5x}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+5x}} = e^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{e^2}$$

2) Raona si l'equació $\sin(x)+2x+1=0$ té alguna arrel real (x en radians).
Si la resposta és afirmativa, determina un interval d'amplitud menor que 2 en el que es trobi una arrel.

(2 punts)

Sigui $f(x)=\sin(x)+2x+1$ és un funció:

- contínua a l'interval $[-\pi/2,0]$
- f(0)=1>0
- $f(-\pi/2) = -1-\frac{2\pi}{2}+1 = -\pi < 0$

Així doncs pel Teorema de Bolzano podem assegurar que existeix un $x\in(-\pi/2,0)=$
=(–1.57,0) tal que f(x)=0.

3) Donada la funció $f(x)=\begin{cases}2x+a & si \quad x\le 0\\ 4x^2+bx-8 & si \quad x>0\end{cases}$

a) Per a quins valors dels paràmetres ***a*** i ***b*** la funció és continua i derivable a tot R?
La funció és clarament contínua i derivable a R-{0}. Ara només imposar que també sigui contínua i derivable en x=0

Per a que sigui contínua en x=0 han de coincidir

- f(0)=a
- $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} 2x+a = a$
- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} 4x^2+bx-8 = -8$

Així doncs la funció és contínua a tot R $\Leftrightarrow$ a=–8 i la b pot agafar qualsevol valor.

Però ara hem d'imposar que també sigui derivable en x=0. Ja sabem quan val la derivada en tots els altres valors

$$f'(x)=\begin{cases}2 & si \quad x<0\\ 8x+b & si \quad x>0\end{cases}$$

ara hem d'imposar que sigui derivable en x=0, per tant a més de ser contínua en x=0 (a=–8) també han de coincidir les dues derivades laterals:

$f'(0^-)=2$ i $f'(0^+)=b \Rightarrow$ b=2

Així doncs tenim que f(x) és contínua i derivable en tot R $\Leftrightarrow$ a=–8 i b=2

b) Per aquests valors trobats expresseu la funció f ' (x).

$$f'(x)=\begin{cases}2 & si \quad x\le 0\\ 8x+2 & si \quad x>0\end{cases}$$

(1,5+0,5=2 punts)

4) Trobeu les rectes tangents a la gràfica de la funció $y=\dfrac{8}{x-2}$ que siguin paral·leles a la recta r: Y+2X=0

Les rectes paral·leles a r tenen pendent m=–2 i la seva equació és de la forma Y=–2X+k on només cal determinar la constant k

Però també sabem que si han de ser tangents a la corba y=f(x) aleshores el pendent d'aquesta recta ha de ser igual a el valor de la derivada en la coordenada x del punt de tangència.
Així doncs podem trobar els punts de tangència imposant que f ' (x)=–2

$$\Rightarrow \frac{-8}{(x-2)^2}=-2 \Rightarrow 4=(x-2)^2 \Rightarrow \pm 2=x-2 \Rightarrow x=0 \ i \ x=4$$

Així doncs tenim dos punts de tangència que són:
(0,f(0))= (0,–4) i (4,f(4))=(4,4)

Per tant les dues rectes tangents solucions són:

- la que passa **pel punt (0,–4)** i que és Y=–-2x+k $\Rightarrow$ k=–4 $\Rightarrow$ **la recta és Y=–2x–4**
- la que passa **pel punt (4,4)** i que és Y=–-2x+k $\Rightarrow$ k=12 $\Rightarrow$ **la recta és Y=–2x+12**

(2 punts)

5) Deriveu les funcions següents:

a) $y=(3x)^{\cos(x)}$

S'ha de fer per derivació logarítmica i resulta que a l'aplicar logaritmes als dos membres tenim:

$$\ln(y)=\ln\left[(3x)^{\cos(x)}\right]=\cos(x)\cdot\ln\left[(3x)\right]$$

ara derivant els dos membres:

$$\frac{y'}{y}=-\sin(x)\cdot\ln(3x)+\cos(x)\frac{3}{3x}$$

$$y'=\left[-\sin(x)\cdot\ln(3x)+\frac{\cos(x)}{x}\right]\cdot y=\left[-\sin(x)\cdot\ln(3x)+\frac{\cos(x)}{x}\right]\cdot(3x)^{\cos(x)}$$

b) $y=\sqrt{\ln(\sin(x))}$

és una aplicació directa de la regla de la cadena:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{\ln(\sin(x))}}\frac{1}{\sin(x)}\cos(x)$$

c) $y=\dfrac{2^x\sqrt{2}\,x}{\sqrt{x}}=\sqrt{2}\left(2^x\ x^{1/2}\right)$

i ara derivem el producte $y' = \sqrt{2}\left(2^x \ln(2)\ x^{1/2} + 2^x \frac{1}{2} x^{-1/2} \right)$

(3 punts)

6) Donada la funció $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

a) Quin és el seu domini?
Domini = R-{0}

b) Trobeu les seves asímptotes

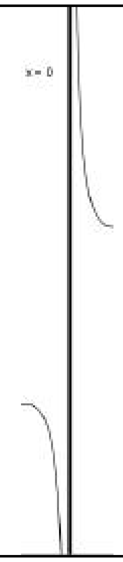
Una vertical en x=0 ja que

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

i

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

i a més podem saber que l'aspecte de la gràfica al seu voltant és el d'aquí a la dreta:



Una inclinada (obliqua) que val per $x \to +\infty$ i per $x \to -\infty$: Y= mx +n on

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

aquest límits també valen per $x \to -\infty$
Així doncs tenim que **Y=X és asímptota tant per** $x \to +\infty$ **com per** $x \to -\infty$

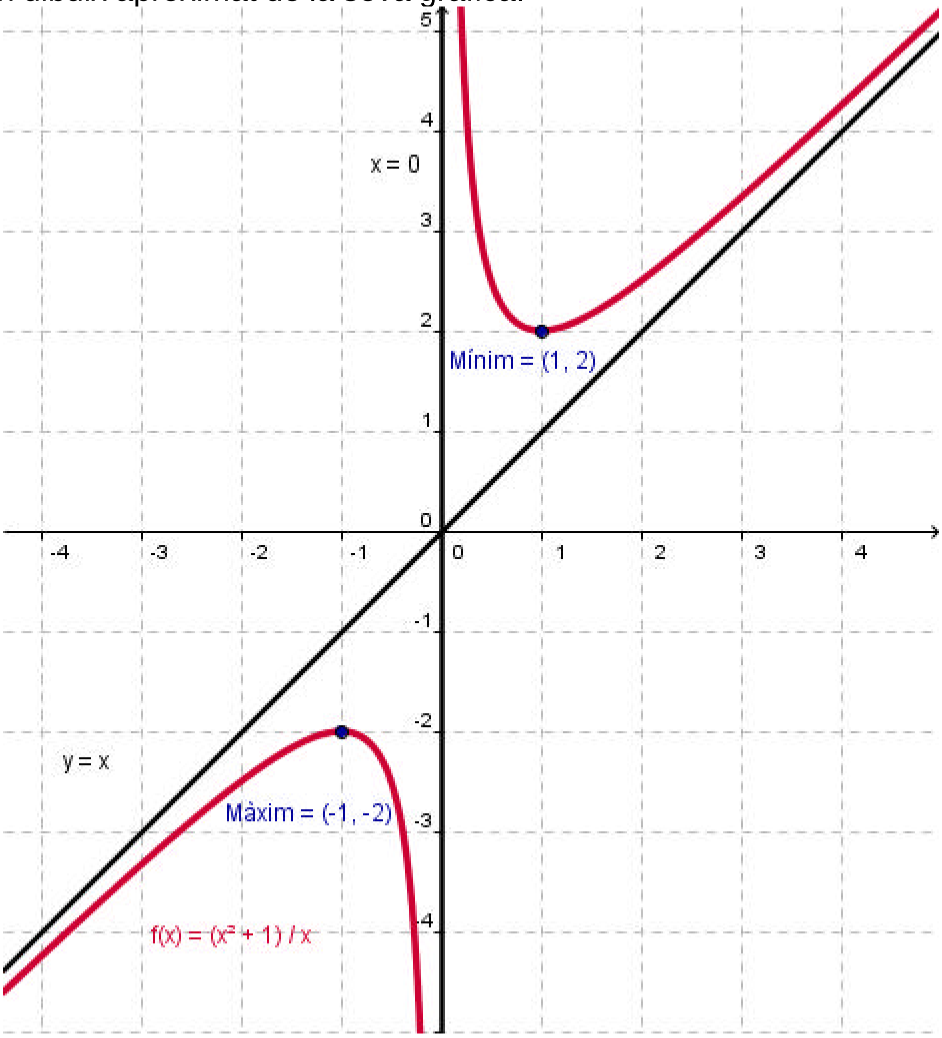
c) Trobeu els seus extrems relatius i les zones de creixement i decreixement.

Estudiem els signes de $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

x		-1		0		1	
$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$	↗↗↗↗↗	-2	↘↘↘	¦	↘↘↘	2	↗↗↗↗
$f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$	+++++	0	$- - -$	¦	$- - -$	0	+++++

Així podem dir que la funció:
Creix $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
Decreix $\forall x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Recordeu que X=0 és una asímptota.
Té un màxim local en el punt (–1,–2)
Té un mínim local en el punt (1,2)

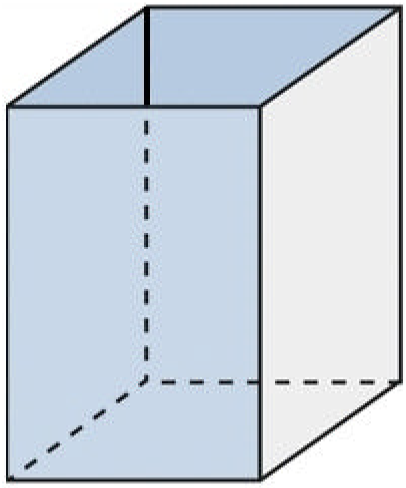
d) Feu un dibuix aproximat de la seva gràfica.



(0,5+1+2,5+1=5 punts)

7) Volem construir una caixa de 8 dm^3 de capacitat, amb forma de prisma recte de base quadrada i sense tapa superior.

Calculeu les dimensions de la caixa perquè la superfície exterior sigui mínima.



(3 punts)

x= costat de la base
y= alçada

La funció a optimitzar de dues variables és $f(x,y) = x^2 + 4xy$
però com tenim un condició que ens diu que el volum ha de ser 8 dm^3. Aleshores tenim que

$$x^2 \cdot y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{x^2}$$

i substituint tenim que la funció que hem de minimitzar d'una variable és:

$$f(x) = x^2 + 4x\frac{8}{x^2} = x^2 + \frac{32}{x}$$

Ara calculem les seves derivades:

$$f'(x) = 2x - \frac{32}{x^2} = \frac{2x^3 - 32}{x^2} \qquad \text{i} \qquad f''(x) = \frac{2x^3 + 64}{x^3}$$

Així doncs buscant els candidats a mínims imposem que $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^3 - 32}{x^2} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x^3 - 32 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}\,dm$$

Ara per assegurar-nos que aquest candidat és un mínim substituïm a la 2a derivada:

$f''(2\sqrt[3]{2}) = \dfrac{2\left(2\sqrt[3]{2}\right)^3 + 64}{\left(2\sqrt[3]{2}\right)^3} > 0$ per tant per aquest valor de x tenim un mínim que és el que buscàvem.

Solució: El prisma de base quadrada buscat té dimensions:

- Costat de la base $x = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}\,dm$

- Alçada $y = \dfrac{8}{x^2} = \dfrac{8}{\left(2\sqrt[3]{2}\right)^2} = \dfrac{8}{4\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2}\sqrt[3]{2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{2}}{2} = \sqrt[3]{2}\,dm$

8) Calculeu les integrals següents:

a) $$\int \frac{x^2 e^{5x^3}}{4} dx = \frac{1}{4}\frac{1}{15}\int 15x^2 e^{5x^3} dx = \frac{1}{60} e^{5x^3} + k \qquad \forall k \in R$$

b) $$\int \frac{x}{\sqrt{1-81x^2}} dx = \int x\left(1-81x^2\right)^{\frac{-1}{2}} dx = \frac{1}{-162}\int -162x\left(1-81x^2\right)^{\frac{-1}{2}} dx =$$

$$= \frac{-1}{162}\frac{2}{1}\left(1-81x^2\right)^{\frac{1}{2}} + k = \frac{-1}{81}\sqrt{1-81x^2} + k \qquad \forall k \in R$$

c) $$\int \frac{3x+19}{3x^2+3x-18} dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x+19}{x^2+x-6} dx$$

Aquesta és la integral d'un funció racional on el denominador té totes les arrels reals i simples:

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$

per tant la funció racional es por descompondre en suma d'aquestes altres funcions racionals:

$$\frac{3x+19}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}$$ Sumant i igualant numeradors tenim:

$$3x + 19 = A(x-2) + B(x+3)$$ Substituint per certs valors tenim que:

Si x=2 $\Rightarrow$ 25=5B $\Rightarrow$ B=5
Si x=–3 $\Rightarrow$ 10=–5A $\Rightarrow$ A=–2

Així doncs:

$$\int \frac{3x+19}{3x^2+3x-18} dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x+19}{x^2+x-6} dx = \frac{1}{3}\left[\int \frac{-2}{x+3} dx + \int \frac{5}{x-2} dx\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-2\ln(x+3) + 5\ln(x-2)\right] + k = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{(x-2)^5}{(x+3)^2}\right) + k$$

$\forall k \in R$

d) $$\int \arctan(3x)\, dx$$

Aquesta s'ha de solucionar per part

u=arctan (3x) $\Rightarrow du = \frac{3}{1+9x^2} dx$

dv = dx $\Rightarrow$ v=x

Així doncs:

$$\int \arctan(3x) dx = x\cdot\arctan(3x) - \int \frac{3x}{1+9x^2} dx =$$

$$= x\cdot\arctan(3x) - \frac{1}{6}\int \frac{6\cdot 3x}{1+9x^2} dx = x\cdot\arctan(3x) - \frac{1}{6}\ln\left(1+9x^2\right) + k$$

$\forall k \in R$

(4 punts)