Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Sabem que la funció $f(x)=\begin{cases} 2ax+2bx^2 & si \quad 0\le x\le 2 \\ 3+\sqrt{x-1} & si \quad 2<x\le 5 \end{cases}$ és contínua i derivable en [0,5]. Quan valen **a** i **b**?

(2 punts)

2) Trobeu el valor **a**, **b** i **c** perquè la corba y = x^3 + a x^2 + b x + c tingui un punt d'inflexió en (0, 1) i el pendent de la recta tangent a la corba en aquest punt sigui 2.

(2 punts)

3) Donada la funció $y=\dfrac{x^2}{x-2}$
   a) Quin és el seu domini?
   b) Trobeu els punts de tall amb els eixos de coordenades.
   c) Trobeu les seves asímptotes.
   d) Trobeu els seus extrems relatius i les zones de creixement i decreixement.
   e) Feu un dibuix aproximat de la seva gràfica.

(0,5+0,5+1+2,5+1=5,5 punts)

4) Donada la funció $f(x)=5\cdot\dfrac{\ln x}{x}+3$
   a) Calculeu el seu domini
   b) Calculeu $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ i interpreteu gràficament els resultats.
   c) Calculeu f ' (x) i estudieu el creixement, decreixement i els màxims i mínims de la funció y=f(x)

(1+1+2,5=4,5 punts)

5)
   a) Defineix que és la primitiva d'una funció
   b) Comprova que $\int \dfrac{1}{\cos(x)}dx=\ln\left|\dfrac{1}{\cos(x)}+tg(x)\right|+K \qquad \forall k\in R$
   c) De totes les primitives de la funció f(x)=4x+6, quina és la que té el valor 4 per x=1?

(0,5 · 3= 1,5 punts)

6) Calculeu
   a) $\int \dfrac{x^2+2x+4}{x+1}dx$
   b) $\int\sqrt{(x+3)^5}\,dx$
   c) $\int \sin(x)\cdot\cos^2(x)\,dx$
   d) $\int \dfrac{dx}{x-\sqrt[4]{x}}$. Feu el canvi $x=t^4$
   e) $\int \dfrac{x^3+x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

(0,5 · 5= 2,5 punts)

7) Donada la funció f (x) = x^3 + $3x^2$. Calculeu l'àrea tancada per la gràfica de la funció f (x), l'eix OX i les rectes x = – 4 x = 1.

(2 punts)

Solució

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Sabem que la funció $f(x)=\begin{cases} 2ax+2bx^2 & si \quad 0\le x\le 2 \\ 3+\sqrt{x-1} & si \quad 2<x\le 5 \end{cases}$ és contínua i derivable en [0,5]. Quan valen **a** i **b**?

(2 punts)

Com que dins de l'interval de definició el radicant és positiu podem assegurar que cadascun dels dos trossos de definició són clarament continus i derivables i podem saber que

$$f'(x)=\begin{cases} 2a+4bx & si \quad 0\le x<2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & si \quad 2<x\le 5 \end{cases}$$

Així doncs només cal que imposem que en X=2 la funció sigui contínua i derivable.

a) Com f(x) és contínua en x=2 aleshores aquests tres valors han de coincidir

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=2a\cdot 2+2b\cdot 2^2=4a+8b \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} 2ax+2bx^2=2a\cdot 2+2b\cdot 2^2=4a+8b \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 3+\sqrt{x-1}=3+\sqrt{2-1}=4 \end{array}\right\}\Rightarrow 4a+8b=4\Rightarrow a+2b=1$$

b) Com f(x) és derivable en x=2 aleshores les dues derivades laterals han de coincidir

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=2a+4b\cdot 2=2a+8b \\ f'(2^+)=\dfrac{1}{2\sqrt{2-1}}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow 2a+8b=\frac{1}{2}\Rightarrow 4a+16b=1$$

I ara solucionant el sistema d'equacions tenim

$$\left.\begin{array}{l} a+2b=1 \\ 4a+16b=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4a+8b=4 \\ 4a+16b=1 \end{array}\right\}\Rightarrow 8b=-3\Rightarrow b=\frac{-3}{8}$$

$$idoncs\ a=1-2b\Rightarrow a=1+\frac{6}{8}\Rightarrow a=\frac{14}{8}\Rightarrow a=\frac{7}{4}$$

Solució doncs: a=3/8 i b=1/4

2) Trobeu el valor **a**, **b** i **c** perquè la corba y = x^3 + a x^2 + b x + c tingui un punt d'inflexió en (0, 1) i el pendent de la recta tangent a la corba en aquest punt sigui 2.

(2 punts)

Hem d'imposar

a) que El punt (0,1) és de la funció, és a dir f(0)=1
b) que en x=0 hi ha un punt d'inflexió cal que f '' (0)=0
c) que el pendent de la recta tangent en x=0 és 2, així doncs f '(0)=2

Calculant les derivades f ' (x) =3 x^2 +2 a x + b , f '' (x) =6 x +2 a i substituint tenim:

$f(0)=1\Rightarrow c=1$

$f''(0)=0\Rightarrow 2a=0\Rightarrow a=0$

$f'(0)=2\Rightarrow b=2$

Per tant la solució és a=0, b=2 i c=1

3) Donada la funció $y = \dfrac{x^2}{x-2}$

a) Quin és el seu domini?

El domini és $R-\{2\}$

b) Trobeu els punts de tall amb els eixos de coordenades.

Amb l'eix OY (X=0) $\Rightarrow$Y=0, per tant és el punt (0,0)

Amb l'eix OX (Y=0) $\Rightarrow 0 = \dfrac{x^2}{x-2} \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, per tant és el punt (0,0)

Així doncs hi ha un únic punt de tall amb els eixos i és el punt (0,0)

c) Trobeu les seves asímptotes.

a) Hi ha una asímptota vertical en X=2, ja que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

i fins i tot sabem que quan x tendeix a 2 per l'esquerra la funció va cap a $-\infty$ i quan x tendeix a 2 per la dreta la funció va cap a $+\infty$

b) Asímptota inclinada.

Com és un quocient de polinomis els límits que calculem per $x \to +\infty$ també valen per $x \to -\infty$

$m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1$ que com és un nombre real vol dir que sí que hi ha i si calculem ara

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-2} - \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to\infty} 2 = 2$$

Per tant la recta Y=X+2 és asímptota per $x \to +\infty$ i també per $x \to -\infty$

d) Trobeu els seus extrems relatius i les zones de creixement i decreixement.

Calculem la 1a derivada i després estudiem els seus signes

$$y' = \frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-4x-x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

Y ' = 0 $\Rightarrow$ En X=0 i X=4

x		0		2		4	
$f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$	↗↗↗↗↗	0	↘↘↘	∄	↘↘↘	8	↗↗↗↗
$f'(x) = \dfrac{x^2-4}{(x-2)}$	+++++	0	− − −		− − −	0	+++++

Així podem dir que la funció:

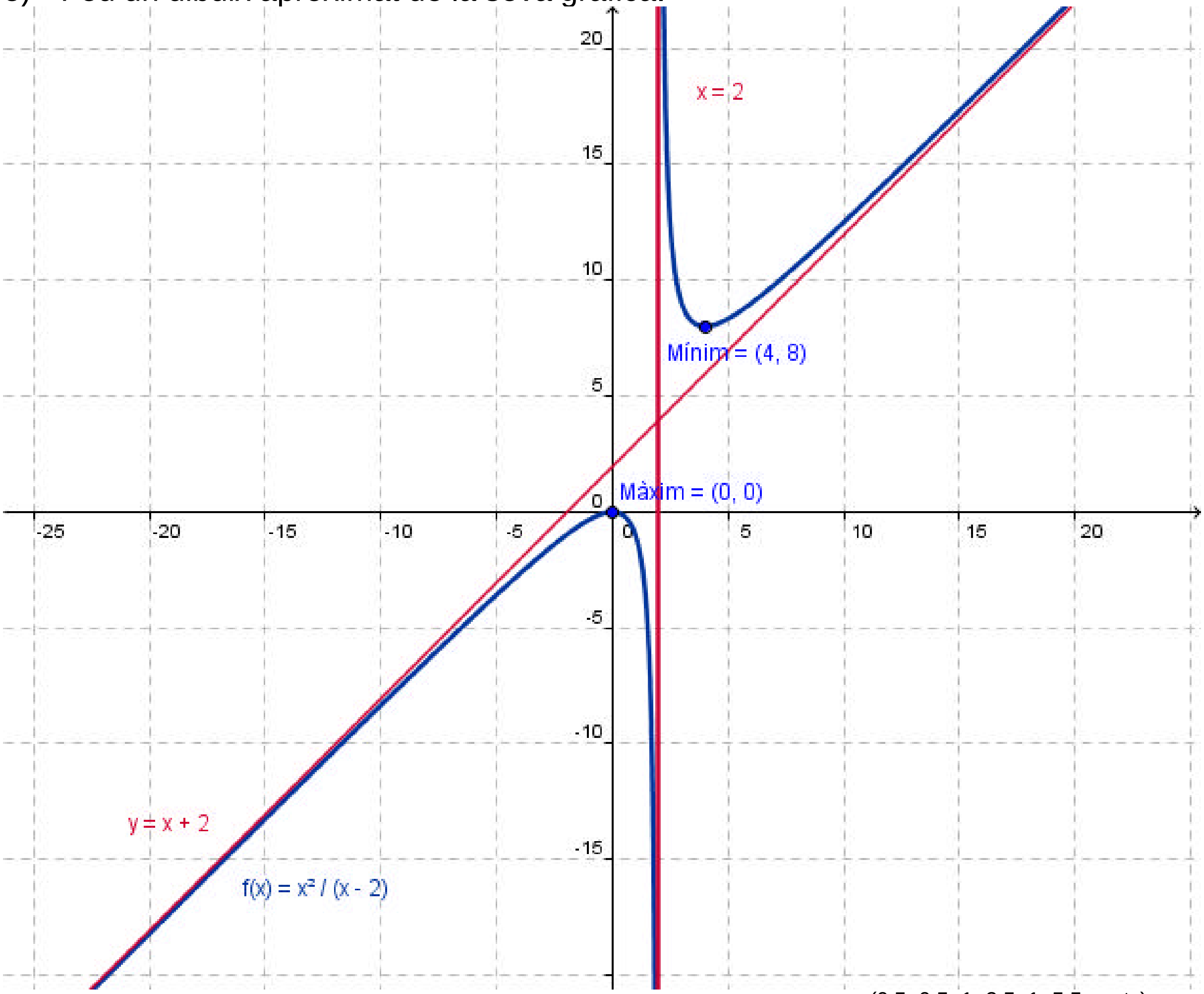
Creix $\forall x \in (-\infty,0)\cup(4,+\infty)$

Decreix $\forall x \in (0,2)\cup(2,4)$. Recordeu que X=2 és una asímptota.

Té un màxim local en el punt (0,0)

Té un mínim local en el punt (4,8)

e) Feu un dibuix aproximat de la seva gràfica.



(0,5+0,5+1+2,5+1=5,5 punts)

4) Donada la funció $f(x) = 5 \cdot \frac{\ln x}{x} + 3$

a) Calculeu el seu domini

Cal que x>0 i que x $\neq$ 0 així doncs el domini és $(0, +\infty)$

b) Calculeu $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ i interpreteu gràficament els resultats.

Calculant els límits

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 5\frac{\ln x}{x} + 3 = 5\frac{-\infty}{0} + 3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 5\frac{\ln x}{x} + 3 = \frac{+\infty}{+\infty} + 3 = ???$$

el segon límit és un indeterminació que podem solucionar o per ordre dels infinits o per l'Hôpital

$$\lim_{x \to +\infty} 5\frac{\ln x}{x} + 3 = \lim_{x \to +\infty} 5 \cdot 0 + 3 = 3$$

$$\lim_{x \to +\infty} 5\frac{\ln x}{x} + 3 = \lim_{x \to +\infty} 5 \cdot \frac{\frac{1}{x}}{1} + 3 = \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{x} + 3 = \frac{5}{+\infty} + 3 = 0 + 3 = 3$$

Així doncs tenim que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$ la qual cosa ens indica que:

a) La recta X=0 és una asímpota per la dreta quan x tendeix a zero per la dreta la funció va cap a $-\infty$

b) La recta Y=3 és una asímptota quan $x \to +\infty$

c) Calculeu f ' (x) i estudieu el creixement, decreixement i els màxims i mínims de la funció y=f(x)

Calculem la 1a derivada i després estudiem els seus signes

$$f(x) = 5\cdot\frac{\ln x}{x} + 3 \Rightarrow f'(x) = 5\cdot\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = 5\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$$

Mirant quan Y ' = 0 tenim que és quan 1—ln(x)=0 $\Rightarrow$ ln(x) = 1 $\Rightarrow$ **X= e**

Ara estudiant els signes de la derivada tenim:

x		0		e	
$f(x) = 5\cdot\frac{\ln x}{x} + 3$		$\nexists$	↗↗↗↗↗	$\frac{5}{e}+3$	↘↘↘↘↘↘
$f'(x) = 5\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$			+++++++	0	– – – – – –

Així podem dir que la funció:

Creix $\forall x \in (0,e)$

Decreix $\forall x \in (e,+\infty)$.

Té un màxim local en el punt $\left(e, \frac{5}{e}+3\right)$

(1+1+2,5=4,5 punts)

5)

a) Defineix que és la primitiva d'una funció

F(x) és una primitiva d'un funció f(x) $\Leftrightarrow$ $F'(x) = f(x) \ \forall x \in Domini(F)$

b) Comprova que $\int \frac{1}{\cos(x)}dx = \ln\left|\frac{1}{\cos(x)} + tg(x)\right| + K \quad \forall k \in R$

Només cal que derivem la funció de la dreta i veure que surt la funció de l'esquerra

$$F(x) = \ln\left|\frac{1}{\cos(x)} + tg(x)\right| + K \quad \forall k \in R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}\cdot\left(\frac{+\sin(x)}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\cos^2(x)}\right) = \frac{1}{\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}}\cdot\left(\frac{\sin(x)+1}{\cos^2(x)}\right) =$$

$$= \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}\cdot\left(\frac{\sin(x)+1}{\cos^2(x)}\right) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Com volíem demostrar

c) De totes les primitives de la funció f(x)=4x+6, quina és la que té el valor 4 per x=1?

Primer integrem i després descobrim la constant.

$$F(x) = \int 4x + 6dx = \frac{4x^2}{2} + 6x + k = 2x^2 + 6x + k \quad \forall k \in R$$

I ara imposant que F(1)=4 $F(1) = 8 + k = 4 \Rightarrow K = -4$

I la funció solució doncs és: $F(x) = 2x^2 + 6x - 4$

(0,5 · 3= 1,5 punts)

6) Calculeu

a) $\int \frac{x^2+2x+4}{x+1} dx$

b) $\int \sqrt{(x+3)^5}\, dx$

c) $\int \sin(x) \cdot \cos^2(x)\, dx$

d) $\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}}$. Feu el canvi $x = t^4$

e) $\int \frac{x^3+x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

(0,5 · 5= 2,5 punts)

a) $\int \frac{x^2+2x+4}{x+1} dx$

Primer cal fer la divisió de polinomis i separar la integral en dues integrals:

$$\int \frac{x^2+2x+4}{x+1} dx = \int \frac{(x+1)(x+1)+3}{x+1} dx = \int \frac{(x+1)(x+1)}{x+1} + \frac{3}{x+1} dx =$$

$$= \int x+1\, dx + \int \frac{3}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} + x + 3\ln|x+1| + k \quad \forall k \in R$$

b) $\int \sqrt{(x+3)^5}\, dx$

Aquesta una vegada escrita com a potència és immediata

$$\int \sqrt{(x+3)^5}\, dx = \int (x+3)^{\frac{5}{2}} dx = \frac{(x+3)^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + k = \frac{2}{7}(x+3)^{\frac{7}{2}} + k = \frac{2}{7}\sqrt{(x+3)^7} + k \qquad \forall k \in R$$

$\int \sin(x) \cdot \cos^2(x)\, dx$

Aquesta també és immediata

$$\int \sin(x) \cdot \cos^2(x)\, dx = -\int \left(-\sin(x)\right) \cdot \cos^2(x)\, dx = -\frac{\cos^3(x)}{3} + k \quad \forall k \in R$$

c) $\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}}$. Feu el canvi $x = t^4$

d)

Si fem el canvi $x = t^4$ tenim que $dx = 4t^3\, dt$ i així doncs substituint en la integral tenim que

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt[4]{x}} = \int \frac{4t^3 dt}{t^4 - t} = \int \frac{4t^2}{t^3 - 1} dt = \frac{4}{3}\int \frac{3t^2}{t^3 - 1} dt = \frac{4}{3}\ln\left|t^3 - 1\right| + k =$$

$$= \frac{4}{3}\ln\left|\left(\sqrt[4]{x}\right)^3 - 1\right| + k = \frac{4}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x^3} - 1\right| + k \qquad \forall k \in R$$

Observeu que al final hem desfet el canvi substituint: $x = t^4 \Rightarrow t = \sqrt[4]{x}$

e) $\int \frac{x^3+x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

Si la separem en dues integrals és immediata

$$\int \frac{x^3+x}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int x^{3-\frac{2}{3}} + x^{1-\frac{2}{3}}\,dx = \int x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + k \quad \forall k \in R$$

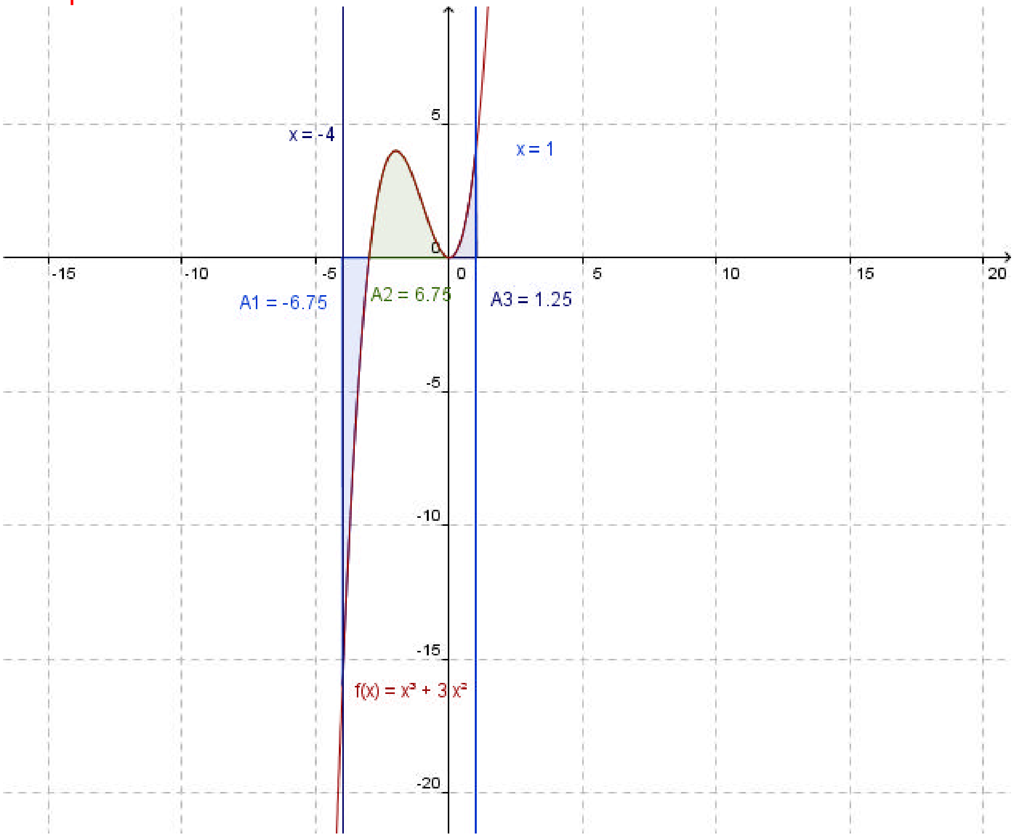
7) Donada la funció f (x) = $x^3 + 3x^2$. Calculeu l'àrea tancada per la gràfica de la funció f (x), l'eix OX i les rectes x = – 4 i x = 1.

(2 punts)

Calculem els punts de tall de la funció amb l'eix OX (Y=0)

$$\left.\begin{matrix} y = x^3 + 3x^2 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x+3 = 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

Com la funció és contínua ens podem estalviar el dibuix de la situació, però si el voleu veure és aquest:



I l'àrea demanada és:

$$A = A1 + A2 + A3 = \left|\int_{-4}^{-3} x^3 + 3x^2 dx\right| + \left|\int_{-3}^{0} x^3 + 3x^2 dx\right| + \left|\int_{0}^{1} x^3 + 3x^2 dx\right| =$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} + x^3\right]_{-4}^{-3}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} + x^3\right]_{-3}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} + x^3\right]_{0}^{1}\right| = \left|\left[\frac{81}{4} - 27 - 64 + 64\right]\right| + \left|\left[-\frac{81}{4} + 27\right]\right| + \left|\left[\frac{1}{4} + 1\right]\right| =$$

$$== \left|\left[\frac{81}{4} + 27 - 64 - 64\right]\right| + \left|\left[-\frac{81}{4} + 27\right]\right| + \left|\left[\frac{1}{4} + 1\right]\right| = \frac{27}{4} + \frac{27}{4} + \frac{5}{4} = \frac{59}{4}\,u^2$$