



Nom i Cognoms: _____

Grup: _____

Data: _____

1) Calculeu els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 9x + 6}{4x^2 - 16}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x - \sqrt{4x^2 - 16x} \right]$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\ln(x^2)}{2^x} \right)^x$

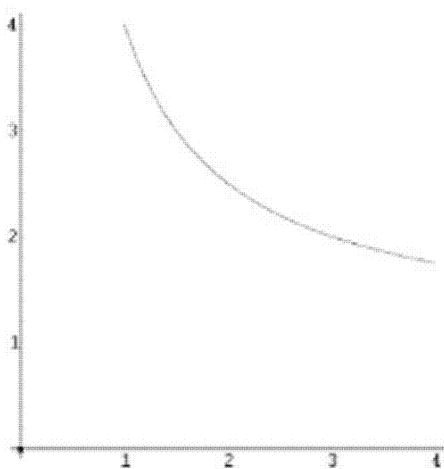
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{3x + 5} e^{-2x}$

(4 punts)

2) Demostreu que l'equació $e^x = x^2$ té alguna solució real i aproximeu-la fins a les dècimes.

(2 punts)

3) La gràfica de la funció $f(x) = \frac{3+x}{x}$, des de $x = 1$ fins a $x = 4$, és la següent:



- a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a aquesta funció en els punts d'abscissa $x = 1$ i $x = 3$.
- b) Dibuixeu el recinte limitat per la gràfica de la funció i les dues rectes tangents que heu calculat.

(2 punts)

4) Deriveu les funcions següents:

a) $y = (2x)^{\sin(x)}$

b) $y = \arccos(3x^2 + 5)$

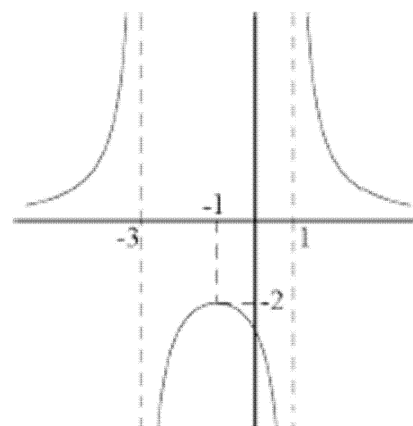
c) $y = \frac{x^3 + 2\sqrt{x} - 7\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

(3 punts)

- 5) Determineu el valor dels paràmetres a, b i c perquè la gràfica de la funció

$$f(x) = \frac{a}{x^2 + bx + c}$$

sigui aquesta



(1,5 punts)

- 6) Donada la funció $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

- Quin és el seu domini?
- Trobeu les seves asímptotes

- Comproveu que la 1a derivada és $y' = \frac{x^3 - 8}{x^3}$

- Trobeu els seus extrems relatius i les zones de creixement i decreixement.
- Feu un dibuix aproximat de la seva gràfica.

(0,5+1+1+1,5+1=5 punts)

- 7) Dins d'un triangle rectangle, de catets 3 i 4 cm, hi ha un rectangle. Dos costats del rectangle estan situats en els catets del triangle i un dels vèrtexs del rectangle és a la hipotenusa del triangle.

- Feu un esbós de la situació descrita.
- Si x és la longitud del costat del rectangle que està situat en el catet petit i y és l'altre costat del rectangle, comproveu que es compleix que $4x+3y=12$.
- Determineu les dimensions del rectangle perquè l'àrea sigui màxima.

(0,5+1+1,5=3 punts)

- 8) Calculeu les integrals següents:

- $\int 2x \cos(3x^2) dx$

- $\int \frac{x}{1+25x^2} dx$

- $\int \frac{-2x^2 + 2x - 2}{x^3 - x^2} dx$

- $\int x \cdot \ln(x^2) dx$

(0,75+2+1,5+2=4,5 punts)



Nom i Cognoms:

Grup:

Data:

1) Calculeu els límits següents:

(4 punts)

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 9x + 6}{4x^2 - 16} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)(x-1)}{4(x-2)(x+2)} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 4} = \frac{3}{16}$$

també es pot fer per l'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 9x + 6}{4x^2 - 16} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x - 9}{8x} = \frac{12 - 9}{16} = \frac{3}{16}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x - \sqrt{4x^2 - 16x} \right] = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x - \sqrt{4x^2 - 16x} \right] \cdot \frac{2x + \sqrt{4x^2 - 16x}}{2x + \sqrt{4x^2 - 16x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 + 16x}{2x + \sqrt{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16x}{2x + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16x}{4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 = 4$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\ln(x^2)}{2^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x^2)}{2^{-x}} \right) = \left(\frac{+\infty}{0^+} \right) = (+\infty)^{-\infty} = \frac{1}{(+\infty)^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{3x + 5} e^{-2x} = 1 \cdot 0 = 0 \quad \text{així doncs anem a fabricar el límit que ens dona el nombre e}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{3x + 5} e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3x + 2}{3x + 5} - 1 \right) e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3x + 2 - 3x - 5}{3x + 5} \right) e^{-2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-3}{3x + 5} \right) e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x + 5}{-3}} \right) e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{3x + 5}{3}} \right) e^{-2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{3x + 5} e^{-2x} = \frac{6}{3} = e^2$$

2) Demostreu que l'equació $e^x = x^2$ té alguna solució real i aproximeu-la fins a les dècimes.

(2 punts)

Sigui $f(x) = e^x - x^2$ és un funció:

- contínua a tot $\mathbb{R}$ i en particular a l'interval $[-1, 0]$
- $f(-1) = e^{-1} - (-1)^2 \approx 0.37 - 1 < 0$
- $f(0) = e^0 - 0^2 = 1 - 0 = 1 > 0$

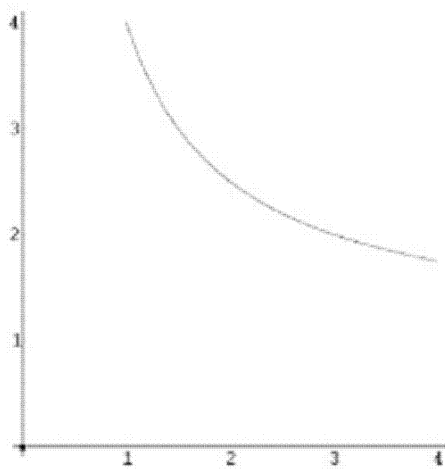
Així doncs pel Teorema de Bolzano podem assegurar que existeix un $x \in (-1, 0)$ tal que $f(x)=0$.

Ara anem a trobat un interval d'amplitud inferior a una dècima per aproximar la solució fins al 1r decimal.

- $f(-0,7) \approx 6.5853 \cdot 10^{-3} > 0$
- $f(-0,8) \approx -0.19 < 0$
- $f(x)$ és contínua a l'interval $[-0.8, -0,7]$

Així doncs pel Teorema de Bolzano podem assegurar que existeix un $x \in (-0,8, -0,7)$ tal que $f(x)=0$ i per tant podem dir que $x \approx -0,7$

3) La gràfica de la funció $f(x) = \frac{3+x}{x}$, des de $x = 1$ fins a $x = 4$, és la següent:



- Calculeu l'equació de les rectes tangents a aquesta funció en els punts d'abscissa $x = 1$ i $x = 3$.
- Dibuixeu el recinte limitat per la gràfica de la funció i les dues rectes tangents que heu calculat.

(2 punts)

Primer de tot anem a calcular la 1a derivada de $f(x)$

$$f(x) = \frac{3+x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot x - (3+x)}{x^2} = \frac{-3}{x^2}$$

Els punts de tangència són: $A(1, f(1)) = (1, 4)$

i el $B(3, f(3)) = (3, 2)$

- La recta tangent en $A(1, 4)$ és una recta que passa pel punt $A(1, 4)$ i que té pendent $m = f'(1) = -3$

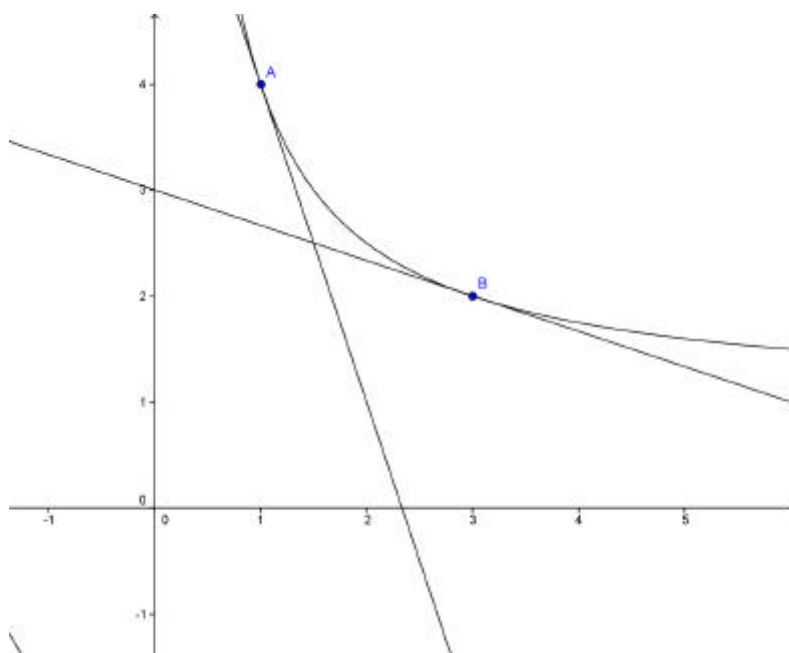
$$y = -3x + n \text{ pel punt } (1, 4) \Rightarrow 4 = -3 + n \Rightarrow n = 7 \text{ Així doncs la 1a recta tangent és } y = -3x + 7$$

- La recta tangent en $B(3, 2)$ és una recta que passa pel punt $B(3, 2)$ i que té pendent $m = f'(3) = -3/9 = -1/3$

- $y = \frac{-1}{3}x + n$ pel punt $(3, 2) \Rightarrow 2 = -1 + n \Rightarrow n = 3$ Així doncs la 2a recta

$$\text{tangent és } y = \frac{-1}{3}x + 3$$

I el dibuix demanat és:



4) Deriveu les funcions següents:

(3 punts)

a) $y = (2x)^{\sin(x)}$

S'ha de fer per derivació logarítmica i resulta que a l'aplicar logaritmes als dos membres tenim:

$$\ln(y) = \ln\left[(2x)^{\sin(x)}\right] = \sin(x) \cdot \ln(2x)$$

ara derivant els dos membres:

$$\frac{y'}{y} = \cos(x) \cdot \ln(2x) + \sin(x) \cdot \frac{2}{2x}$$

$$y' = \left[\cos(x) \cdot \ln(2x) + \frac{\sin(x)}{x} \right] \cdot y = \left[\cos(x) \cdot \ln(2x) + \frac{\sin(x)}{x} \right] \cdot (2x)^{\sin(x)}$$

b) $y = \arccos(3x^2 + 5)$

és una aplicació directa de la regla de la cadena:

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - (3x^2 + 5)^2}} (6x) = \frac{-6x}{\sqrt{1 - (3x^2 + 5)^2}}$$

c)

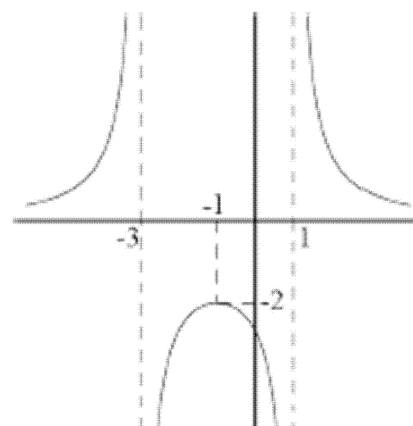
$$y = \frac{x^3 + 2\sqrt{x} - 7\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x^3}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{7\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = x^{(3-1/2)} + 2 - 7x^{(1/3-1/2)} = x^{5/2} + 2 - 7x^{-1/6}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{5}{2}x^{3/2} - 7\frac{-1}{6}x^{-7/6} = \frac{5}{2}x^{3/2} + \frac{7}{6}x^{-7/6}$$

5) Determineu el valor dels paràmetres a, b i c perquè la gràfica de la funció

$$f(x) = \frac{a}{x^2 + bx + c}$$

sigui aquesta



(1,5 punts)

Com hi ha dues asímptotes verticals en $x = -3$ i en $x = 1$ el denominador s'ha d'anul·lar en aquests valors.

Així doncs com és un polinomi de 1n grau amb coeficient de x^2 que és 1 podem dir que

□ $x^2 + bx + c = (x + 3)(x - 1) \Rightarrow c = -3$ i $b = 2$

□ O, d'una altra forma, solucionant el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 9 - 3b + c = 0 \\ 1 + b + c = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1a - 2a \Rightarrow 8 - 4b = 0 \Rightarrow b = 2 \text{ i en } 2a \Rightarrow 1 + 2 + c = 0 \Rightarrow c = -3 \end{array}$$

També sabem que la gràfica passa pel punt $(-1, -2)$. així doncs $f(-1) = -2$

$$f(x) = \frac{a}{x^2 + 2x - 3} \text{ i } f(-1) = -2 \Rightarrow -2 = \frac{a}{1 - 2 - 3} \Rightarrow 8 = a$$

Així doncs $a=8$, $b=2$ i $c=-3$

6) Donada la funció $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

(0,5+1+1+1,5+1=5 punts)

a) Quin és el seu domini?

Domini = $\mathbb{R} - \{0\}$

b) Trobeu les seves asímptotes

Una vertical en $x=0$ ja que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$ i a més podem saber

que la gràfica al seu voltant se'n va cap a $+\infty$

Una inclinada (obliqua) que val per $X \rightarrow +\infty$ i per $X \rightarrow -\infty$: $Y = mx + n$ on

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 4 - x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

aquest límits també valen per $X \rightarrow -\infty$

Així doncs tenim que **$Y=X$ és asímptota tant per $X \rightarrow +\infty$ com per $X \rightarrow -\infty$**

c) Comproveu que la 1a derivada és $y' = \frac{x^3 - 8}{x^3}$

$$y' = \frac{3x^2x^2 - (x^3 + 4)2x}{(x^2)^2} = \frac{3x^4 - 2x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^4 - 8x}{x^4} = \frac{\cancel{x}(x^3 - 8)}{\cancel{x}x^3} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$$

d) Trobeu els seus extrems relatius i les zones de creixement i decreixement.

Estudiem els signes de $f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3}$

x		0		2	
$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$	$\nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow$	$\nearrow$	$\searrow \searrow \searrow$	$\nearrow \nearrow \nearrow \nearrow$	
$f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3}$	+++++		---	0	+++++

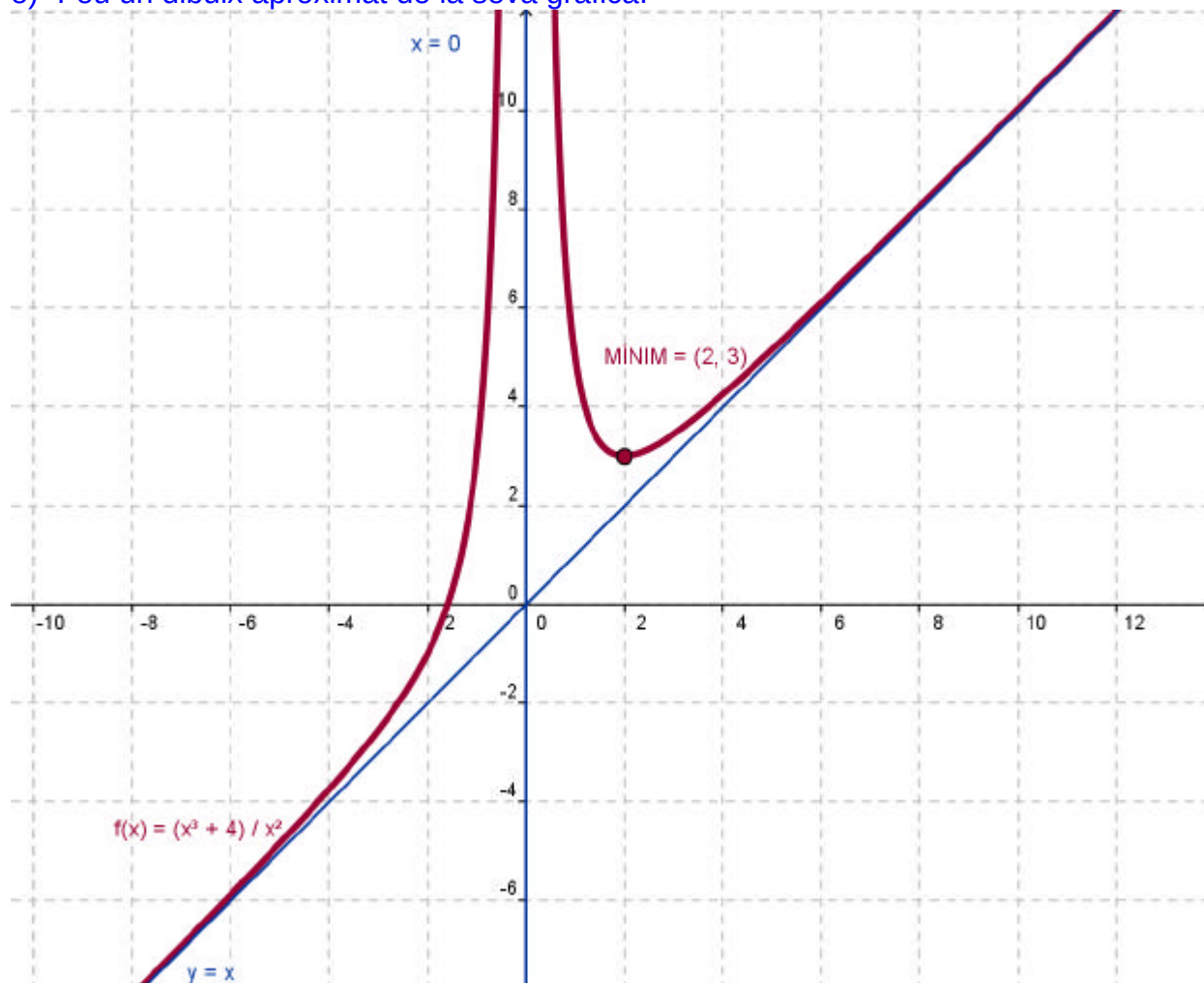
Així podem dir que la funció:

Creix $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Decreix $\forall x \in (0, 2)$. Recordeu que $x=0$ és una asímptota.

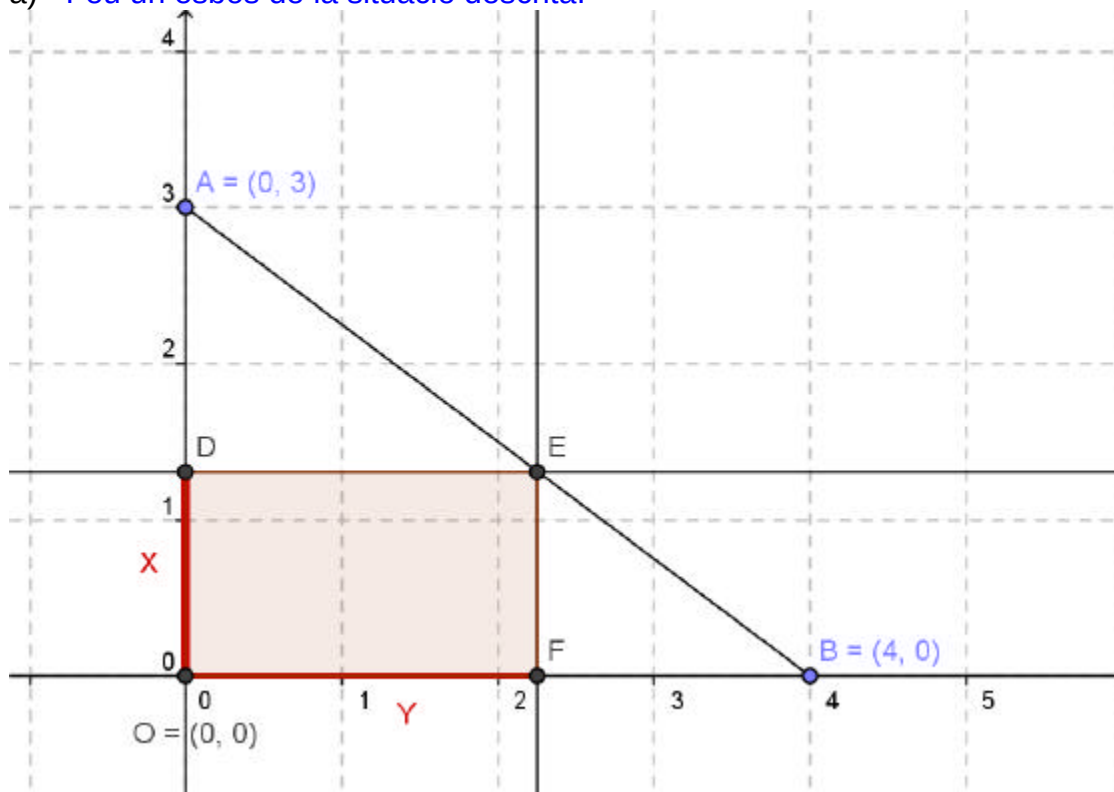
Té un mínim local en el punt (2,3)

e) Feu un dibuix aproximat de la seva gràfica.



- 7) Dins d'un triangle rectangle, de catets 3 i 4 cm, hi ha un rectangle. Dos costats del rectangle estan situats en els catets del triangle i un dels vèrtexs del rectangle és a la hipotenusa del triangle.

a) Feu un esbós de la situació descrita.



El triangle és OAB i el rectangle és ODEF

- b) Si x és la longitud del costat del rectangle que està situat en el catet petit i y és l'altre costat del rectangle, comproveu que es compleix que $4x+3y=12$.

Això ho podem demostrar de moltes formes. Aquí van algunes:

- Només cal que observem que els triangles OAB i FEB són semblants, per tant tenen costats proporcionals:

$$\frac{4}{3} = \frac{4-y}{x} \Rightarrow 4x = 3(4-y) \Rightarrow 4x = 12 - 3y \Rightarrow 4x + 3y = 12$$

- Tangent (angle ABO)=Tangent (angle AED)

$$\frac{3}{4} = \frac{3-x}{y} \Rightarrow 3y = 4(3-x) \Rightarrow 3y = 12 - 4x \Rightarrow 4x + 3y = 12$$

- Sumant Àrees:

Àrea triangle OAB= Àrea triangle BFE + Àrea triangle EDA + Àrea Rect ADEF

$$\frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{(4-y) \cdot x}{2} + \frac{y(3-x)}{2} + x \cdot y \Rightarrow 12 = 4x - \cancel{yx} + 3y - \cancel{yx} + \cancel{2xy} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 = 4x + 3y$$

- Imposant que el punt E(y,x) és de la recta AB
- etc...

c) Determineu les dimensions del rectangle perquè l'àrea sigui màxima.

La funció a optimitzar és l'àrea del rectangle

$$A(x,y)=x \cdot y$$

però com és de dues variables hem de trobar una relació entre les variables. De l'apartat b podem deduir que

$$y = \frac{12 - 4x}{3}$$

$$A(x,y) = xy \Rightarrow A(x) = x \frac{12 - 4x}{3} = \frac{1}{3}(12x - 4x^2)$$

Ara estudiant els màxims i mínim d'aquesta funció tenim:

El domini d'aquesta funció és $(0,3)$ o $[0,3]$ si voleu considerar els casos en que $x=0$ cm o $x=3$ cm com a vàlids.

Busquem els candidats a extrems igualant la derivada a zero:

$$A'(x) = \frac{1}{3}(12 - 8x) \Rightarrow A'(x) = \frac{1}{3}(12 - 8x) = 0 \Leftrightarrow 12 = 8x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

Ara per assegurar-nos que passa en aquest candidat, estudiem el creixement i decreixement de la funció en el seu domini.

X	X <= 0		$\frac{3}{2} \text{ cm}$		X >= 3
f(x)	$\nexists$	$\nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow$		$\searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow$	$\nexists$
f'(x)	$\nexists$	+++++	0	-----	$\nexists$

Així doncs podem assegurar que per $x = \frac{3}{2} \text{ cm}$ tenim el màxim absolut buscat de la funció. I

per trobar el valor de l'altra variable substituïm: $y = \frac{12 - 4 \cdot \frac{3}{2}}{3} = \frac{12 - 6}{3} = 2 \text{ cm}$

Solució: El rectangle d'àrea màxima és el de 1,5 cm per 2 cm.

(0,5+1+1,5=3 punts)

8) Calculeu les integrals següents:

$$a) \int 2x \cos(3x^2) dx = \frac{1}{3} \int 6x \cos(3x^2) dx = \frac{1}{3} \sin(3x^2) + k \quad \forall k \in R$$

$$b) \int \frac{x}{1+25x^2} dx = \frac{1}{50} \int \frac{50x}{1+25x^2} dx = \frac{1}{50} \ln|1+25x^2| + k \quad \forall k \in R$$

$$c) \int \frac{-2x^2 + 2x - 2}{x^3 - x^2} dx = \int \frac{-2x^2 + 2x - 2}{x^2(x-1)} dx$$

Aquesta és la integral d'un funció racional on el denominador té totes les arrels reals, una simple ($x=1$) i una doble ($x=0$)

$$x^3 - x^2 = x^2(x-1)$$

per tant la funció racional es pot descompondre en suma d'aquestes altres funcions racionals:

$$\frac{-2x^2 + 2x - 2}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1}$$

$$\frac{-2x^2 + 2x - 2}{x^2(x-1)} = \frac{A(x-1) + Bx(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)}$$

Sumant i igualant numeradors tenim:

$$-2x^2 + 2x - 2 = A(x-1) + Bx(x-1) + Cx^2$$

I substituint per certs valors::

- Si $x=1 \Rightarrow -2 = C \Rightarrow \mathbf{C = -2}$
- Si $x=0 \Rightarrow -2 = -A \Rightarrow \mathbf{A = 2}$
- Igualant coeficients de $x^2 \Rightarrow -2 = B + C \Rightarrow -2 = B - 2 \Rightarrow \mathbf{B=0}$

Així doncs:

$$\begin{aligned} \int \frac{-2x^2 + 2x - 2}{x^2(x-1)} dx &= \int \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} dx = \int \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x-1} dx = 2 \int x^{-2} dx - 2 \int \frac{dx}{x-1} = \\ &= \frac{2x^{-1}}{-1} - 2 \ln|x-1| + k = \frac{-2}{x} - 2 \ln|x-1| + k \end{aligned}$$

$$\forall k \in R$$

$$d) \int x \cdot \ln(x^2) dx$$

Aquesta s'ha de solucionar per parts

$$u = \ln(x^2) \Rightarrow u' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

$$v' = x \Rightarrow v = \int x dx = \frac{1}{2}x^2$$

Així doncs:

$$\int x \cdot \ln(x^2) dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x^2) - \int \frac{2}{x} \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x^2) - \int x dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x^2) - \frac{1}{2}x^2 + k = \frac{1}{2}x^2 (\ln(x^2) - 1) + k$$

$$\forall k \in \mathbb{R}$$

(0,75·2+1,5·2=4,5 punts)