Generalitat de Catalunya
Departament d'Ensenyament
Institut Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
2n BATX MA
Examen Bloc I: Anàlisi (no volums)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

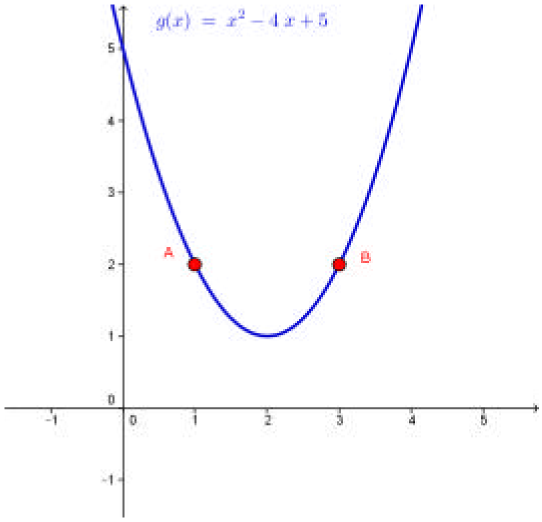
1) Calculeu els límits següents:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{8x^2+8x-16}{3x^2-3}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[2x^2-\sqrt{4x^4+8x^2}\right]$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{e^{3x}}{x^3}\right)^{-x}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x}{2x+3}\right)^{-4x}$

(4 punts)

2) Donada la gràfica de la funció $g(x)=x^2-4x+5$:



a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a aquesta funció en els punts d'abscissa x = 1 i x = 3.

b) Dibuixeu el recinte limitat per la gràfica de la funció i les dues rectes tangents que heu calculat.

c) Calculeu l'àrea del recinte limitat per aquestes tres corbes

(1,5 + 0,5 + 2 = 4 punts)

3) Deriveu les funcions següents:

a) $y=(\sin x)^{3x}$

b) $y=\arctan(3x^2+5)$

c) $y=\dfrac{3x^4+4\sqrt{x}-5\sqrt[4]{x}}{2\sqrt{x^3}}$

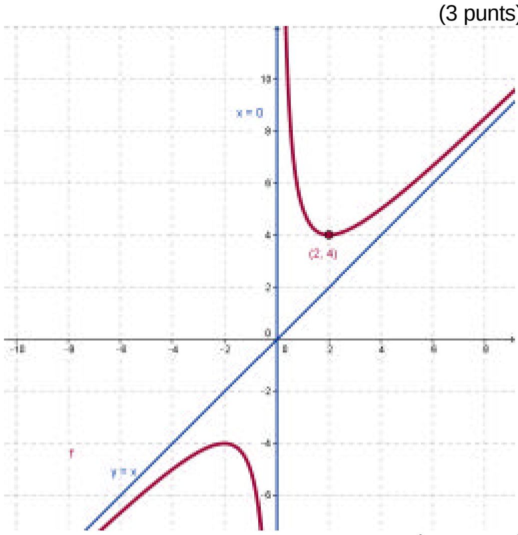
(3 punts)

4) Determineu el valor dels paràmetres a, b i c perquè la gràfica de la funció

$$f(x)=\frac{ax^2+b}{x-c}$$

- passi pel punt (2,4) i
- tingui per asímptotes les rectes x = 0 i y = x

és a dir, perquè la gràfica sigui la del dibuix adjunt.



(1,5 punts)

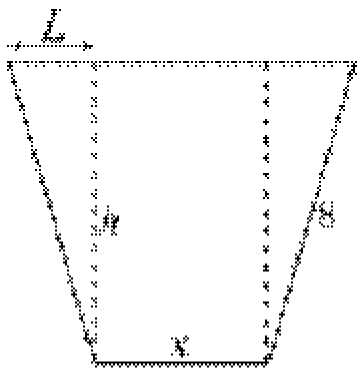
5) Donada la funció $y = \frac{3x^2}{x^2 - 9}$

a) Quin és el seu domini?
b) Trobeu les seves asímptotes
c) Comproveu que la 1a derivada és $y' = \frac{-54x}{\left(x^2 - 9\right)^2}$
d) Trobeu els seus extrems relatius i les zones de creixement i decreixement.
e) Feu un dibuix aproximat de la seva gràfica.

(0,5+1+1+1,5+1=5 punts)

6) Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplària superior del canal sigui el doble de l'amplària inferior i que els costats no paral·lels siguin de 8 metres.

A la dreta teniu un esquema de la secció del canal.



a) Trobeu el valor del segment L de la gràfica en funció de la variable x (amplària inferior del canal).
b) Sabem que l'àrea d'un trapezi es igual a l'altura multiplicada per la semisuma de les bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció és donada per

$$A(x) = \frac{3x\sqrt{256 - x^2}}{4}$$

c) Calculeu el valor de x perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (no cal que comproveu que és realment un màxim).

(0,75+0,75+1,5=3 punts)

7) Calculeu les integrals següents:

a) $\int 27\, x^2\, (x^3 + 6)^8\, dx$

b) $\int \frac{\cos(3x)}{1 + \sin^2(3x)} dx$

c) $\int \frac{2x^2 - 7x - 6}{x^3 - x^2 - 2x} dx$

d) $\int x \cdot e^{3x}\, dx$

(0,75·2+1,5*2=4,5 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Calculeu els límits següents:

(4 punts)

a) $$\lim_{x\to1}\frac{8x^2+8x-16}{3x^2-3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to1}\frac{8\cancel{(x-1)}(x+2)}{3\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{8\cdot3}{3\cdot2}=4$$

també es pot fer per l'Hôpital.

$$\lim_{x\to1}\frac{8x^2+8x-16}{3x^2-3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to1}\frac{16x+8}{6x}=\frac{16+8}{6}=\frac{24}{6}=4$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left[2x^2-\sqrt{4x^4+8x^2}\right]=\infty-\infty=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[2x^2-\sqrt{4x^4+8x^2}\right]\frac{\left[2x^2+\sqrt{4x^4+8x^2}\right]}{\left[2x^2+\sqrt{4x^4+8x^2}\right]}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\cancel{4x^4}-\cancel{4x^4}-8x^2\right]}{\left[2x^2+\sqrt{4x^4}\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8x^2}{2x^2+2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8x^2}{4x^2}=\lim_{x\to+\infty}(-2)=-2$$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{3x}}{x^3}\right)^{-x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)^{-\infty}=[com\ O(e^{3x})>O(x^3)]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(+\infty)^{-\infty}=\frac{1}{(+\infty)^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0^+$$

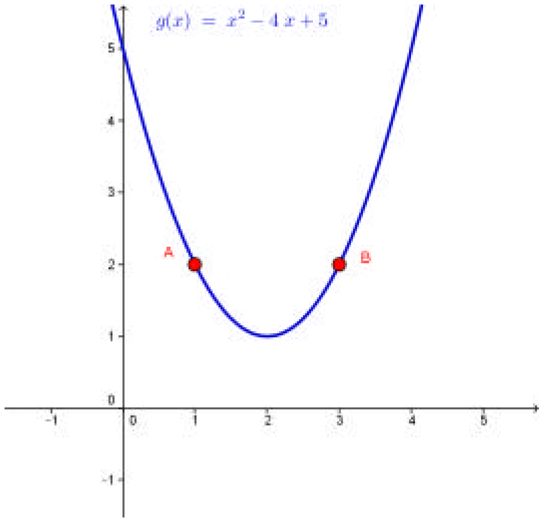
d) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{2x+3}\right)^{-4x}=1^{-\infty}$$ així doncs anem a fabricar el límit que ens dóna el nombre e

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{2x+3}\right)^{-4x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x}{2x+3}-1\right)^{-4x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\cancel{2x}-\cancel{2x}-3}{2x+3}\right)^{-4x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-3}{2x+3}\right)^{-4x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-3}}\right)^{-4x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+3}{-3}}\right)^{\frac{2x+3}{-3}(-4x)\frac{-3}{2x+3}}=$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{12x}{2x+3}}=e^{\frac{12}{2}}=e^6$$

2) Donada la gràfica de la funció $g(x) = x^2 - 4x + 5$:



a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a aquesta funció en els punts d'abscissa x = 1 i x = 3.

b) Dibuixeu el recinte limitat per la gràfica de la funció i les dues rectes tangents que heu calculat.

c) Calculeu l'àrea del recinte limitat per aquestes tres corbes

(1,5 + 0,5 + 2 = 4 punts)

Primer de tot anem a calcular la 1a derivada de g(x)

$g(x) = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow g'(x) = 2x - 4$ **Els punts de tangència són: A(1,f(1))=(1,2) i el B(3,f(3))=(3,2)**

- **La recta tangent en A(1,2) és una recta que passa pel punt A(1,2) i que té pendent m=f '(1)=2– 4 = –2**

  $y = -2x + n \quad pel\ punt\ (1,2) \Rightarrow 2 = -2 + n \Rightarrow n = 4$ **Així doncs la 1a recta tangent és** $y = -2x + 4$

- **La recta tangent en B(3,2) és una recta que passa pel punt B(3,2) i que té pendent m=f '(3)=6 – 4=2**
- $y = 2x + n \quad pel\ punt\ (3,2) \Rightarrow 2 = 6 + n \Rightarrow n = -4$ **Així doncs la 2a recta tangent és** $y = 2x - 4$

Per fer el dibuix millor i també per l'apartat c) cal trobar el punt en el que es tallen les dues rectes:

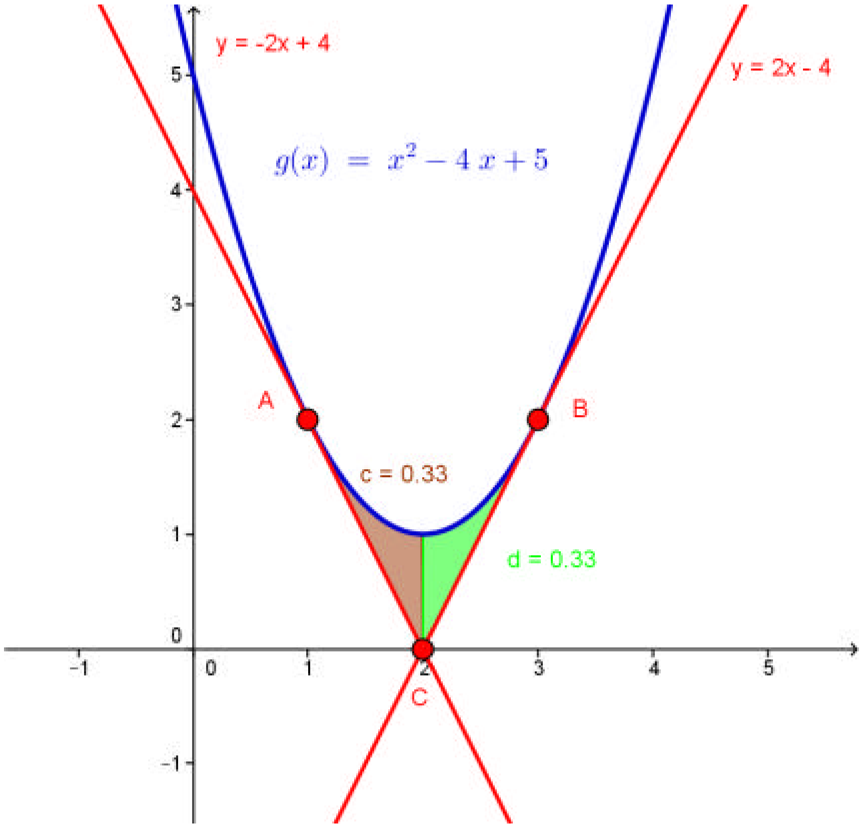
$$\left.\begin{array}{r} y = 2x - 4 \\ y = -2x + 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2,0)$$

I el dibuix el teniu al després i l'àrea buscada és:

$$A = \int_1^2 \left(x^2 - 4x + 5 \right) - (-2x + 4)\,dx + \int_2^3 \left(x^2 - 4x + 5 \right) - (2x - 4)\,dx =$$

$$= \int_1^2 \left(x^2 - 2x + 1 \right) dx + \int_2^3 \left(x^2 - 6x + 9 \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \right]_2^3 =$$

$$= \left[\left(\frac{8}{3} - 4 + 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 1 \right) \right] + \left[\left(\frac{27}{3} - 27 + 27 \right) - \left(\frac{8}{3} - 12 + 18 \right) \right] = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} unitats^2$$



3) Deriveu les funcions següents:

(3 punts)

a) $y = (\sin x)^{3x}$

S'ha de fer per derivació logarítmica i resulta que a l'aplicar logaritmes als dos membres tenim:

$$\ln(y) = \ln\left[(\sin x)^{3x}\right] = 3x \cdot \ln[\sin(x)]$$

ara derivant els dos membres:

$$\frac{y'}{y} = 3 \cdot \ln(\sin(x)) + 3x\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$y' = \left[3 \cdot \ln(\sin(x)) + 3x\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right] \cdot y = \left[3 \cdot \ln(\sin(x)) + 3x\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right] \cdot (\sin(x))^{3x}$$

b) $y = \arctan(3x^2 + 5)$

és una aplicació directa de la regla de la cadena:

$$y' = \frac{1}{1 + (3x^2 + 5)^2}(6x) = \frac{6x}{1 + (3x^2 + 5)^2}$$

c) $y=\dfrac{3x^4+4\sqrt{x}-5\sqrt[4]{x}}{2\sqrt{x^3}}$

$$y=\frac{3x^4+4\sqrt{x}-5\sqrt[4]{x}}{2\sqrt{x^3}}=\frac{3x^4}{2x^{3/2}}+\frac{4x^{1/2}}{2x^{3/2}}-\frac{5x^{1/4}}{2x^{3/2}}=\frac{3}{2}x^{(4-3/2)}+2x^{(1/3-3/2)}-\frac{5}{2}x^{(1/4-3/2)}=$$

$$Y=\frac{3}{2}x^{5/2}+2x^{-1}-\frac{5}{2}x^{-5/4}$$

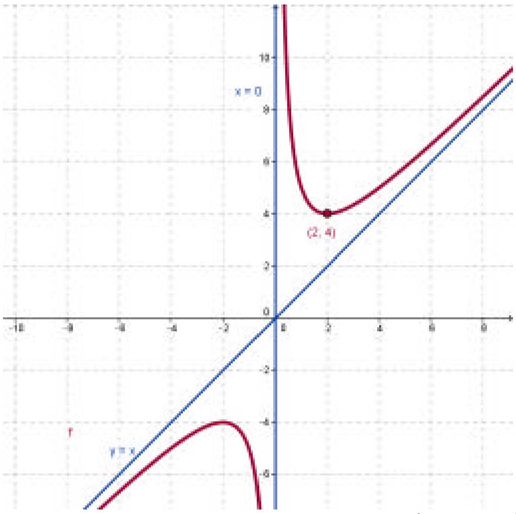
$$\Rightarrow y'=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}x^{3/2}+2(-1)x^{-2}-\frac{5}{2}\cdot\frac{(-5)}{4}x^{-9/4}=\frac{15}{4}x^{3/2}-2x^{-2}+\frac{25}{8}x^{-9/4}$$

4) Determineu el valor dels paràmetres a, b i c perquè la gràfica de la funció

$$f(x)=\frac{a\,x^2+b}{x-c}$$

- passi pel punt (2,4) i
- tingui per asímptotes les rectes x = 0 i y = x

és a dir, perquè la gràfica sigui la del dibuix adjunt.



(1,5 punts)

Com hi ha una asímptota verticals en x = 0, el denominador s'ha d'anul·lar en aquests valors. Així doncs C=0

Com la recta Y= X és asímptota

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=m=1\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2+b}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}a=a=1$$

També sabem que la gràfica passa pel punt (2,4). així doncs f(2) =4

$$f(x)=\frac{x^2+b}{x}\quad i\ f(2)=4\Rightarrow 4=\frac{4+b}{2}\Rightarrow 8=4+b\Rightarrow b=4$$

Així doncs a=1, b=4 i c=0 i la funció és: $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$

5) Donada la funció $y = \dfrac{3x^2}{x^2 - 9}$

a) Quin és el seu domini?
b) Trobeu les seves asímptotes
c) Comproveu que la 1a derivada és $y' = \dfrac{-54x}{\left(x^2 - 9\right)^2}$
d) Trobeu els seus extrems relatius i les zones de creixement i decreixement.
e) Feu un dibuix aproximat de la seva gràfica.

(0,5+1+1+1,5+1=5 punts)

a) Quin és el seu domini?
Domini = R–{ – 3, 3}

b) Trobeu les seves asímptotes

Vertical en x=–3 ja que $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \dfrac{27}{0^+} = +\infty$ **i** $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \dfrac{27}{0^-} = -\infty$ **i a més podem saber que la gràfica al seu voltant**

Vertical en x=3 ja que $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \dfrac{27}{0^-} = -\infty$ **i** $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \dfrac{27}{0^+} = +\infty$ **i a més podem saber que la gràfica al seu voltant**

Una horitzontal en y =3 que val per $x \to +\infty$ **i per** $x \to -\infty$ **(ja que és un quocient de polinomis):** $n = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{x^2 - 9} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 3 = 3$

aquest límits també valen per $x \to -\infty$

c) Comproveu que la 1a derivada és $y' = \dfrac{-54x}{\left(x^2 - 9\right)^2}$

$$y' = \frac{6x(x^2 - 9) - 3x^2(2x)}{\left(x^2 - 9\right)^2} = \frac{\cancel{6x^3} - 54x - \cancel{6x^3}}{\left(x^2 - 9\right)^2} = \frac{-54x}{\left(x^2 - 9\right)^2}$$

d) Trobeu els seus extrems relatius i les zones de creixement i decreixement.

Estudiem els signes de $y' = \dfrac{-54x}{\left(x^2 - 9\right)^2}$

x		**-3**		**0**		**3**	
$f(x) = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$	↗ ↗	$\nexists$	↗	**0**	↘	$\nexists$	↘ ↘
$f'(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^3}$	**+++++**		**+ +**	**0**	**– –**		**– – – – –**

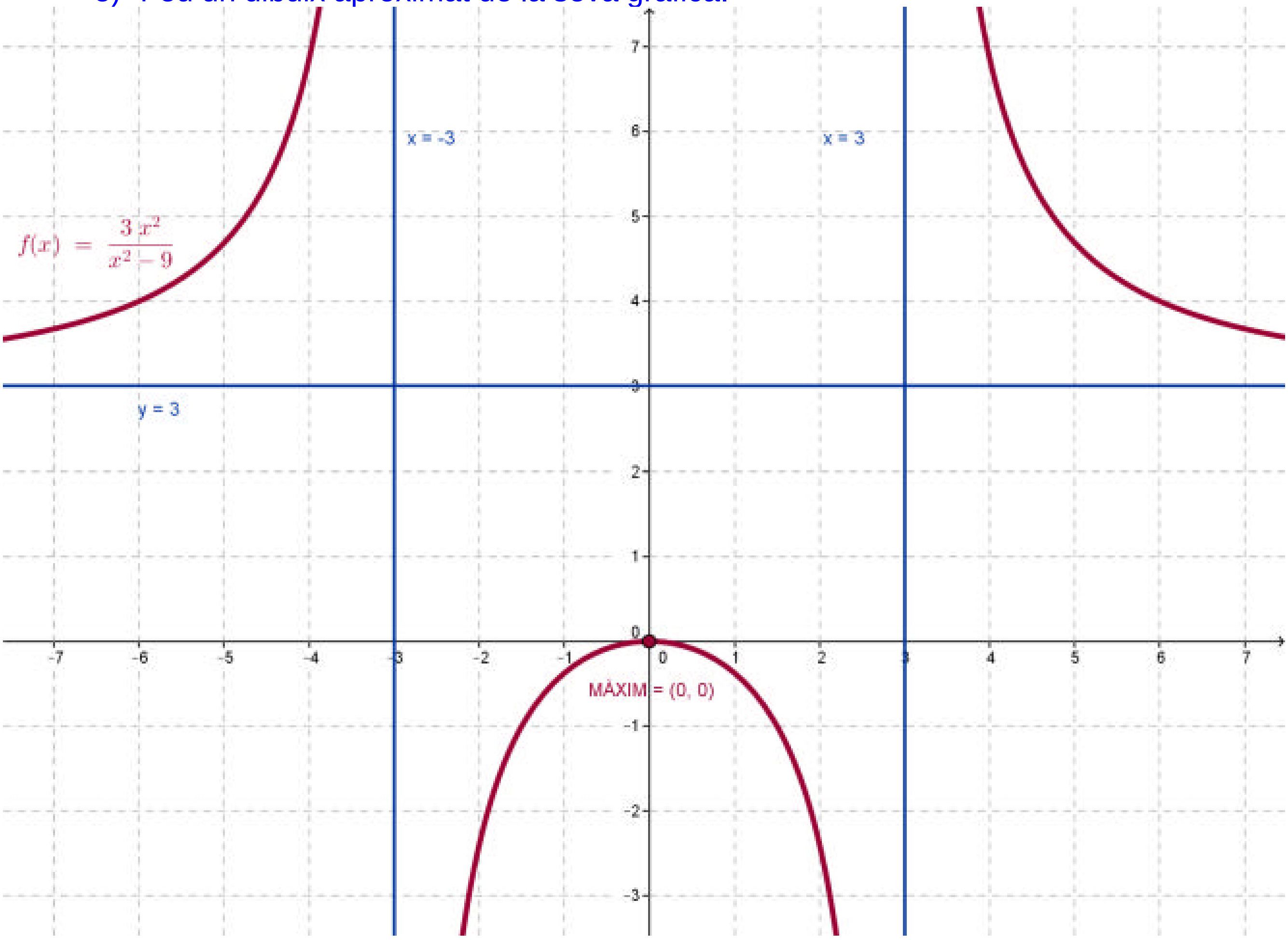
Així podem dir que la funció:

Creix $\forall x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 0)$

Decreix $\forall x \in (0, 3) \cup (3, +\infty)$**.**

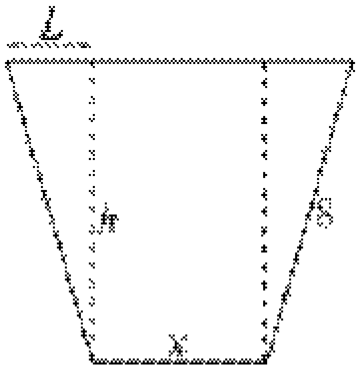
Té un màxim local en el punt (0,0)

e) Feu un dibuix aproximat de la seva gràfica.



6) Es vol construir un canal que tingui com a secció un trapezi isòsceles de manera que l'amplària superior del canal sigui el doble de l'amplària inferior i que els costats no paral·lels siguin de 8 metres.

A la dreta teniu un esquema de la secció del canal.



a) Trobeu el valor del segment L de la gràfica en funció de la variable x (amplària inferior del canal).

b) Sabem que l'àrea d'un trapezi es igual a l'altura multiplicada per la semisuma de les bases. Comproveu que, en aquest cas, l'àrea de la secció és donada per

$$A(x)=\frac{3x\sqrt{256-x^2}}{4}$$

c) Calculeu el valor de x perquè l'àrea de la secció del canal sigui màxima (no cal que comproveu que és realment un màxim).

(0,75+0,75+1,5=3 punts)

Solució

(*a*) Siguin $b_1 = x$ i $b_2 = 2x$ les dues bases del trapezi. Es compleix que $L + b_1 + L = b_2$. Per tant, $L = x/2$.

(*b*) L'altura del trapezi, d'acord amb el teorema de Pitàgores, compleix que $h^2 + L^2 = 8^2$. D'aquí se'n dedueix que

$$h(x) = \frac{\sqrt{256-x^2}}{2}.$$

Llavors, l'àrea és

$$A(x) = \frac{b_1+b_2}{2}h = \frac{3x}{2}\cdot\frac{\sqrt{256-x^2}}{2} = \frac{3x\sqrt{256-x^2}}{4},$$

tal com volíem.

(*c*) La derivada de la funció $A(x)$ és

$$A'(x) = \frac{3}{4}\left[\sqrt{256-x^2} + \frac{x}{2\sqrt{256-x^2}}(-2x)\right] = \frac{3(256-2x^2)}{4\sqrt{256-x^2}}.$$

Llavors, $A'(x) = 0$ implica que $x = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$.

També és possible treballar amb la funció $f(x) = x^2(256-x^2)$, resultat d'haver elevat la funció àrea al quadrat i haver eliminar els factors constants.

Solució: $x = 8\sqrt{2}\,m$ (cal contestar amb unitats)

7) Calculeu les integrals següents:

(0,75·2+1,5*2=4,5 punts)

a) $\int 27x^2(x^3+6)^8 dx = 27\frac{1}{3}\int 3x^2(x^3+6)^8 dx = 9\frac{(x^3+6)^9}{9}+k = (x^3+6)^9+k$

$\forall k \in R$

b) $\int \frac{\cos(3x)}{1+\sin^2(3x)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3\cos(3x)}{1+(\sin(3x))^3}dx = \frac{\arctan(\sin(3x))}{3}+k \quad \forall k \in R$

c) $\int \frac{2x^2-7x-6}{x^3-x^2-2x}dx = \int \frac{2x^2-7x-6}{x(x^2-x-2)}dx = \int \frac{2x^2-7x-6}{x(x+1)(x-2)}dx$

Aquesta és la integral d'una funció racional on el denominador té totes les arrels reals i simples (x=0, x=–1 i x=2)

$x^3-x^2-2x = x(x^2-x-2) = x(x+1)(x-2)$

per tant la funció racional es por descompondre en suma d'aquestes altres funcions racionals:

$$\frac{2x^2-7x-6}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}$$

$$\frac{2x^2-7x-6}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A(x+1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)}$$

Sumant i igualant numeradors tenim:

$2x^2-7x-6 = A(x+1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+1)$

I substituint per certs valors::

- **Si x=0 $\Rightarrow$ –6 = -2A $\Rightarrow$ A = 3**
- **Si x= –1 $\Rightarrow$ 2+7–6 = –3B $\Rightarrow$ 3 = 3B $\Rightarrow$ B = 1**
- **Si x= 2 $\Rightarrow$ 8–14–6 = 6 C $\Rightarrow$ –12 = 6C $\Rightarrow$ C = –2**

Així doncs:

$$\int \frac{2x^2-7x-6}{x(x+1)(x-2)}dx = \int \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}\,dx = \int \frac{3}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{-2}{x-2}\,dx =$$

$$= 3\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx - 2\int \frac{1}{x-2}\,dx =$$

$$= 3\ln|x| + \ln|x+1| - 2\ln|x-2| + k = \ln\left|\frac{x^3(x+1)}{(x-2)^2}\right| + k$$

$\forall k \in R$

d) $\int x \cdot e^{3x}\, dx$

Aquesta s'ha de solucionar per parts

u= x$\Rightarrow$ u ' = 1

$$v' = e^{3x} \Rightarrow v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}\int 3e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}$$

Així doncs:

$$\int x \cdot e^{3x}\, dx = x \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx = \frac{x\,e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\frac{1}{3}\int 3e^{3x} dx = \frac{x\,e^{3x}}{3} - \frac{1}{9}e^{3x} + k =$$

$$= \frac{x\,e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + k = \frac{e^{3x}}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) + k$$

$\forall k \in R$