



Nom i Cognoms:

Grup:

Data: 9/5/2012

- 1) Donades les corbes $y = x + 4$ i $y = x^2 + x + 3$
- Dibuixeu la regió limitada per aquestes dues corbes
 - Calculeu l'àrea d'aquesta regió
 - El volum del cos generat al revolucionar aquesta regió al voltant de l'eix OX
(1+1+1=3 punts)

- 2)
- Discutiu el sistema d'equacions lineals següent en funció dels valors del paràmetre m .

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (1+m)y + mz = m + 1 \end{array} \right\}$$

- Solucioneu el cas SCD del sistema anterior.
- Si les dues primeres equacions són les d'una recta r i la última la d'un pla α . A la vista dels resultats obtinguts a l'apartat "a)" digues quina és la posició relativa de r i α segons els valors del paràmetre " m "
(2.75+1,5+0,75=5 punts)

- 3) Donats en R^3 els punts $A(1,0,-1)$ i $B(3,0,2)$, la recta r d'equació:

$$r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1} \text{ i el pla } p: x - 2y + z + 1 = 0. \text{ Trobeu:}$$

- Equacions contínues i implícites de la recta que passa per A i B: $\overrightarrow{AB}$.
- Equacions paramètriques de la recta que passa per A i paral·lela a r .
- Equacions paramètriques de la recta per A i perpendicular a p . Obten el punt d'intersecció d'aquesta recta amb el pla p .
- Posició relativa de la recta $\overrightarrow{AB}$ i de la recta r .
- Posició relativa entre la recta r i el pla p .

(1 + 0,5 + 1 + 1+0,5=4 punts)

- 4) Donada la recta $s: \begin{cases} x + az = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ i el pla $p: x - 2y + z + 1 = 0$

- Trobeu un punt i un vector director de la recta s
- Trobeu un punt i un parell de vectors directores del pla p .
- Trobeu un vector normal al pla p
- Trobeu el valor del paràmetre " a " per a que la recta s sigui paral·lela al pla p

(0,5 + 0,75 + 0,25 + 0,5=2 punts)



Nom i Cognoms:

Grup:

Data: 9/5/2012

1) Donades les corbes $y = x + 4$ i $y = x^2 + x + 3$

a) Dibuixeu la regió limitada per aquestes dues corbes

① a) *Buquenye en a tallon*

$$\left. \begin{array}{l} y = x + 4 \\ y = x^2 + x + 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + 4 = x^2 + x + 3 \\ 0 = x^2 - 1 \\ 1 = x^2 \\ x = \pm \sqrt{1} = \pm 1 \end{array}$$

PUNTS de tall
 $\Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 5 \quad (1, 5)$
 $x = -1 \Rightarrow y = 3 \quad (-1, 3)$

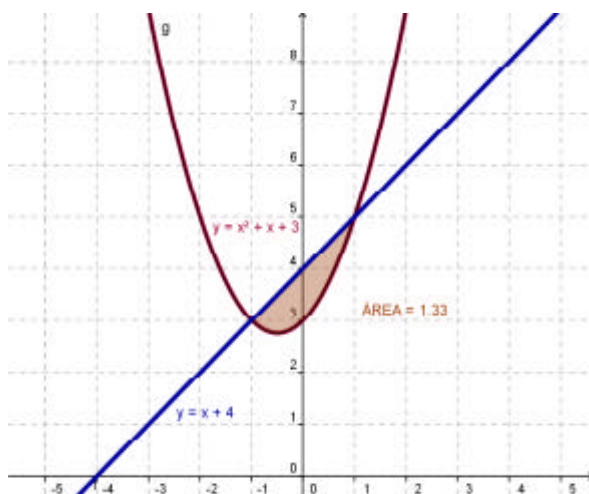
$\Rightarrow y = x + 4$ Reda

$$\begin{array}{r|l} x & y \\ \hline 0 & 4 \\ -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{array}$$

$y = x^2 + x + 3$ parabola

$$\begin{array}{r|l} x & y \\ \hline -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{9}{4} \\ 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{array}$$

Vertex en
 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$
 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 3 = \frac{1-2+12}{4}$
 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$



b) Calculeu l'àrea d'aquesta regió

$$\begin{aligned} \text{b) Àrea} &= \int_{-1}^1 (x+4) - (x^2+x+3) dx = \int_{-1}^1 -x^2 + 1 dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{-1}{3} + 1 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \text{ unitats}^2 \end{aligned}$$

c) El volum del cos generat al revolucionar aquesta regió al voltant de l'eix OX

$$\begin{aligned}
 \text{c) Volum} &= \pi \left[\int_{-1}^1 (x+4)^2 dx - \int_{-1}^1 (x^2+x+3)^2 dx \right] = \\
 &= \pi \left[\int_{-1}^1 x^2 + 8x + 16 dx - \int_{-1}^1 x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 6x + 9 dx \right] = \\
 &= \pi \left[\int_{-1}^1 -x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 2x + 7 dx \right] = \\
 &= \pi \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 7x \right]_{-1}^1 = \pi \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 2 + 1 + 7 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - 2 + 7 \right) \\
 &= \pi \left(10 - \frac{2}{5} \right) = \frac{48\pi}{5} \text{ units}^3
 \end{aligned}$$

(1+1+1=3 punts)

2)

a) Discuti el sistema d'equacions lineals següent en funció dels valors del paràmetre m .

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (1+m)y + mz = m+1 \end{array} \right\}$$

2) ^{a)} Com A és quadrada començo per $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix} = m^2 + 1 - m - 1 = m^2 - m = m(m-1)$$

$\Rightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ o } m = 1 \Rightarrow 3 \text{ CASOS}$

CAS I) $m \neq 0 ; m \neq 1$ S.C.D. $\begin{cases} R_3(A) = 3 \\ R_3(\text{Ampl}) = 3 \\ \text{INC} = 3 \end{cases}$

CAS II) $m = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{P3 = P1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} R_3(A) = 2 \\ R_3(\text{Ampl}) = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ S.C.I amb 1 grau de llibertat

CAS III) $m = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} |A| = 0 \Rightarrow R_3(A) < 3 \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \neq 0 \Rightarrow R_3(A) \geq 2 \end{array} \right\} R_3(A) = 2$$

obant pl $R_2 \neq 0$ amb la columna $\vec{b}$ i $\neq 3 \Rightarrow$ S.I

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right| = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow R_3(\text{Ampl}) = 3$$

b) Solucioneu el cas SCD del sistema anterior.

b) Solució del cas I $m \neq 0, 1$ S.C.D.

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ m+1 & m+1 & m \end{vmatrix}}{m(m-1)} \stackrel{C2-C1}{=} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ m+1 & 0 & m \end{vmatrix}}{m(m-1)} \stackrel{\text{Desenv. } C2}{=} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & m+1 \end{vmatrix}}{m(m-1)}$$

$$X = \frac{\cancel{m} \cdot m}{\cancel{m} (m-1)} = \frac{m}{m-1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix}}{m(m-1)} \stackrel{\text{Desenv. } F2}{=} \frac{-1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m+1 \end{vmatrix}}{m(m-1)} = \frac{-1(m+1-1)}{m(m-1)} = \frac{-1}{m-1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix}}{m(m-1)} \stackrel{\text{Desenv. } F2}{=} \frac{\cancel{m} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m+1 \end{vmatrix}}{\cancel{m} (m-1)} = \frac{m+1-1}{m-1} = \frac{m}{m-1}$$

Solució

$$\begin{cases} x = \frac{m}{m-1} \\ y = \frac{-1}{m-1} \\ z = \frac{m}{m-1} \end{cases}$$

c) Si les dues primeres equacions són les d'una recta r i la última la d'un pla α .
A la vista dels resultats obtinguts a l'apartat "a)" digues quina és la posició relativa de r i α segons els valors del paràmetre "m"

c)

Cas I $m \neq 0, 1$ S.C.D $\Rightarrow r \cap \alpha = 1 \text{ PUNT}$
 $\Rightarrow$ SECANTS en un PUNT

Cas II $m = 0$ S.C.I amb 1 grau de llibertat
 $\Rightarrow r \cap \alpha = \text{una recta} \Rightarrow r \subset \alpha$

Cas III $m = +1$ S.I $\Rightarrow r \cap \alpha = \emptyset \Rightarrow r \parallel \alpha$

(2.75+1.5+0.75=5 punts)

3) Donats en R^3 els punts $A(1,0,-1)$ i $B(3,0,2)$, la recta r d'equació:

$$r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1} \text{ i el pla } p \text{ d'equació } p: x - 2y + z + 1 = 0. \text{ Trobeu:}$$

a) Equacions contínues i implícites de la recta que passa per A i B: $\overline{AB}$.

$$a) \left. \begin{array}{l} \overline{AB} = r(A; \overrightarrow{AB}) \\ \overrightarrow{AB} = (2, 0, 3) \\ A(1, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{EQ CONTINUES} \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{EQ IMPLÍCITES} \\ y=0 \\ 3(x-1) = 2(z+1) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \\ 3x-2z=+5 \end{array} \right\}$$

b) Equacions paramètriques de la recta que passa per A i paral·lela a r .

$$b) \left. \begin{array}{l} s = r(A; \overrightarrow{v_r}) \\ A(1, 0, -1) \\ \overrightarrow{v_r} = (1, 2, -1) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{array} \right\} \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Equacions paramètriques de la recta per A i perpendicular a p . Obtén el punt d'intersecció d'aquesta recta amb el pla p .

$$c) \left. \begin{array}{l} r = r(A; m_\pi) \\ m_\pi = (1, -2, 1) \\ A(1, 0, -1) \end{array} \right\} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}$$

$$\text{EQ. PARAMÈTRICA} \quad \left. \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{array} \right\} \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$r \cap \pi = T_\lambda (1+\lambda, -2\lambda, -1+\lambda) \text{ un punt arbitrari de } r$$

Imposo que $T_\lambda \in \pi$

$$1+\lambda + 4\lambda - 1 + \lambda + 1 = 0$$

$$\begin{array}{l} 6\lambda = -1 \\ \lambda = -1/6 \end{array}$$

$$\boxed{T_{\lambda=-1/6} \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{7}{6} \right)}$$

ÉS el PUNT $r \cap \pi$

d) Posició relativa de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ i de la recta r .

$$d) \quad \overleftrightarrow{AB} = r(A; \overrightarrow{AB}) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(1, 0, -1) \\ \overrightarrow{AB} = (2, 0, 3) \end{array} \right.$$

$$r \quad \left\{ \begin{array}{l} R(-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{v_r} = (1, 2, -1) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{AB} : \overrightarrow{v_r} \quad \text{Sen } \angle \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ja que } \frac{2}{1} \neq \frac{0}{2}$$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{RA}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 3 - 12 + 2 \neq 0$$

$$\overrightarrow{RA} = (2, -1, -1)$$

$\Rightarrow$ no s'intersecten (CREUEN)

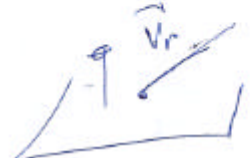
e) Posició relativa entre la recta r i el pla π .

$$e) \quad r \quad \left\{ \begin{array}{l} R(-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{v_r} = (1, 2, -1) \end{array} \right.$$

$$\pi \Rightarrow m_{\pi} = (1, -2, 1)$$

$$\overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{m_{\pi}}? \quad \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{m_{\pi}} = 1 - 4 + 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_r} \text{ i } \overrightarrow{m_{\pi}} \text{ no són } \perp \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  $\Rightarrow r \text{ i } \pi \text{ es tallen en un punt}$

(1 + 0,5 + 1 + 1 + 0,5 = 4 punts)

- 4) Donada la recta $s: \begin{cases} x + az = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$ i el pla $p: x - 2y + z + 1 = 0$

a) Trobeu un punt i un vector director de la recta s

4
a) $s: \begin{cases} x + az = 2 \\ y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \forall z \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{matrix}$

$$\begin{cases} x = 2 - a\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{v}_s = (2, 1, 0) \in s$$

b) Trobeu un punt i un parell de vectors directores del pla p .

b) $\pi: x - 2y + z = -1$
 $\forall y, \forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 2\mu - \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \mu, \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow P \in \pi \quad P(-1, 0, 0)$

$\vec{v} = (2, 1, 0)$
 $\vec{w} = (-1, 0, 1)$ son L.I. ja que $\frac{2}{-1} \neq \frac{1}{0}$ son vector director de π

c) Trobeu un vector normal al pla p

c) $n_\pi = (1, -2, 1)$

d) Trobeu el valor del paràmetre "a" per a que la recta s sigui paral·lela al pla p

d) $\vec{v}_s = (-a, 1, 1)$
 $n_\pi = (1, -2, 1)$ hauria de ser $\perp \Rightarrow \vec{v}_s \cdot n_\pi = 0$

$\Rightarrow -a - 2 + 1 = 0$
 $\boxed{a = -1}$

(0,5 + 0,75 + 0,25 + 0,5 = 2 punts)