



Nom i Cognoms:

Grup:

Data: 8/5/2014

1) Donades les corbes $y = 2x$ i $y = 2x^3$

- a) Dibuixeu la regió limitada per aquestes dues corbes
- b) Calculeu l'àrea d'aquesta regió
- c) El volum del cos generat al revolucionar aquesta regió al voltant de l'eix OX
(1+1+1=3 punts)

2)

- a) Discutiu el sistema d'equacions lineals següent en funció dels valors del paràmetre m .

$$\left. \begin{array}{l} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array} \right\}$$

- b) Solucioneu el cas SCD del sistema anterior.

- c) Si la primera equació és la d'un pla α i les dues últimes són les d'una recta r . A la vista dels resultats obtinguts a l'apartat "a)" digues quina és la posició relativa de r i α segons els valors del paràmetre " m "

(2.75+1,5+0,75=5 punts)

3) Donat el punt $P(2,3,4)$, el pla $p: X + 2Y + 3Z = 6$ i la recta $s: \frac{x+b}{1} = \frac{y-2}{a} = \frac{z}{3}$

- a) Calculeu la distància del punt P al pla p
- b) Trobeu el punt M que és la projecció perpendicular del punt P sobre el pla p
- c) Trobeu el punt Q que és el simètric d'aquest punt P respecte el pla p
- d) Trobeu els valors de " a " i " b " per a que la recta s estigui continguda en el pla p

(0,5+1,5+ 0,5+1,5 =4 punts)

4) Donades les rectes $r: \begin{cases} y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$ i $s: \frac{2x-4}{10} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{2}$

- a) Trobeu un punt i vector director de cadascuna
- b) Estudieu quina és la seva posició relativa
- c) Calculeu la distància de r a s
- d) Trobeu la recta perpendicular comuna a les dues rectes.

(0,5+1+0,75+0,75=3 punts)



Nom i Cognoms:

Grup:

Data: 8/5/2014

1) Donades les corbes $y = 2x$ i $y = 2x^3$

a) Dibuixeu la regió limitada per aquestes dues corbes

b) Calculeu l'àrea d'aquesta regió

c) El volum del cos generat al revolucionar aquesta regió al voltant de l'eix OX

(1+1+1=3 punts)

① a) Com les rectes són contínues m'ho diré en què es tallen

$$\begin{aligned} y=2x & \\ y=2x^3 & \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x^3 = 2x \\ 2x^3 - 2x = 0 \\ 2x(x^2 - 1) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ x^2-1=0 \\ x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Pts de tall $(0,0)$ $(1,2)$ $(-1,2)$

també sabem que $y=2x$ és una recta i $y=2x^3$ una cúbica i donant la valor.

x	y
-1	-2
0	0
1	2

x	y
-2	-16
-1	-2
0	0
1	2
2	16



també es pot veure que és una zona simètrica respecte l'origen

ja que $y=2x$ i $y=2x^3$ són funcions senars.

$$\begin{cases} f(x) = -f(-x) \\ g(x) = -g(-x) \end{cases} \quad \forall x \in \text{domini}$$

b)

$$A = \begin{cases} \text{Per simetria} \\ = 2 \int_0^1 (2x - 2x^3) dx = 4 \int_0^1 (x - x^3) dx = 4 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\ = 4 \left(\frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{4} + 0 \right) = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1 \text{ unitat}^2 \\ \text{O directament} \\ = \int_{-1}^0 (2x^3 - 2x) dx + \int_0^1 (2x - 2x^3) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ u}^2 \end{cases}$$

b)

$$\text{Volun} = \left\{ \begin{array}{l} \text{PER SIMEETRIA} \\ = 2\pi \int_0^1 (2x)^2 - (2x^3)^2 dx = 2\pi \int_0^1 4x^2 - 4x^6 dx \\ = 4\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = 8\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) = \\ = 8\pi \frac{7-3}{21} = \frac{32\pi}{21} u^3 \end{array} \right.$$

O DIRECTAMENT

$$\begin{aligned} &= \pi \int_{-1}^1 (2x)^2 - (2x^3)^2 dx = \pi \int_{-1}^1 4x^2 - 4x^6 dx = \\ &= 4\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7} \right]_{-1}^1 = 4\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) = \\ &= 4\pi \frac{14-6}{21} = \frac{32\pi}{21} u^3 \end{aligned}$$

2)

a) Discutiu el sistema d'equacions lineals següent en funció dels valors del paràmetre m .

$$\begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$$

2) a) Com la matriu de coef. és quadrada calcularem Δ_r

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F1-F2} \begin{vmatrix} 0 & m-3 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Desm F1}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & m-3 & 0 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(m-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} = -(m-3)(1-m) = (m-3)(m-1)$$

$\Leftrightarrow \forall m \neq 1, 3 \quad |A| \neq 0 \Rightarrow R_g(A) = 3$

CAS I $\Rightarrow R_g(A_{\text{Augl}}) \geq R_g(A) = 3$
 $A_{\text{Augl}} \in 3 \times 4 \Rightarrow R_g(A_{\text{Augl}}) \leq 3$
 $\Rightarrow R_g(A_{\text{Augl}}) = 3$
INC = 3

$\Rightarrow$ S.C.D.

CAS II $m = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{com F3=F1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{SOBRA F3}$$

$\Rightarrow R_g(A) \leq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R_g(A) = 2$
 No es pot alinear les files
 $\Rightarrow R_g(A_{\text{Augl}}) = 2$
INC = 3

$\Rightarrow$ S.C.I amb 1 grau de llibertat

CAS III $m = 3 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow R_g(A) \leq 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2-F1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ S.I

b) Solucioneu el cas SCD del sistema anterior.

b) Solució S.C.D. $\forall m \neq 1, 3$ S.C.D.

$$|A| = (m-3)(m-1) \quad \text{solució per Cramer}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & m & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(m-3)(m-1)} \stackrel{F1-F3}{=} \frac{\begin{vmatrix} 0 & m-1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(m-3)(m-1)} \stackrel{\text{Desenv per } F1}{=}$$

$$= \frac{-\cancel{(m-1)} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{(m-3)\cancel{(m-1)}} = \frac{-(5-4)}{(m-3)} = \frac{-1}{m-3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ m & 4 & 1 \end{vmatrix}}{(m-3)(m-1)} \stackrel{F2-F1}{=} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 4 & 1 \end{vmatrix}}{(m-3)(m-1)} \stackrel{\text{Desenv per } F2}{=} \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix}}{(m-3)(m-1)} =$$

$$= \frac{(1-m)}{(m-3)(m-1)} = \frac{-1}{m-3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ m & 1 & 4 \end{vmatrix}}{(m-3)(m-1)} \stackrel{F3-F1}{=} \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 4 \\ 0 & 3-m & 1 \\ m-1 & 1-m & 0 \end{vmatrix}}{(m-3)(m-1)} \stackrel{F2-F1}{=} \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 4 \\ 0 & 3-m & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{(m-3)\cancel{(m-1)}}$$

$$= \frac{0 + m + 0 - 4(3-m) - 0 + 1}{(m-3)} = \frac{m-12+4m+1}{(m-3)}$$

$$= \frac{5m-11}{(m-3)}$$

- c) Si la primera equació és la d'un pla α i les dues últimes són les d'una recta r . A la vista dels resultats obtinguts a l'apartat "a)" digues quina és la posició relativa de r i α segons els valors del paràmetre "m"

(2,75+1,5+0,75=5 punts)

c)

Cas I $m \neq 1, 3$ $r \cap \pi$ és SCD $\Rightarrow$ $r \cap \pi$ decreu en UN PUNT

Cas II $m = 1$ $r \cap \pi$ és SCD amb 1 grau de llibertat $\Rightarrow r \cap \pi = 1$ Recta $\Rightarrow r \subset \pi$

Cas III $m = 3$ $r \cap \pi$ S.I $\Rightarrow r // \pi$

- 3) Donat el punt $P(2,3,4)$, el pla p $X + 2Y + 3Z = 6$ i la recta $s: \frac{x+b}{1} = \frac{y-2}{a} = \frac{z}{3}$

- Calculeu la distància del punt P al pla p
- Trobeu el punt M que és la projecció perpendicular del punt P sobre el pla p
- Trobeu el punt Q que és el simètric d'aquest punt P respecte el pla p
- Trobeu els valors de "a" i "b" per a que la recta s estigui continguda en el pla p

(0,5+1,5+ 0,5+1,5 =4 punts)

3)

a) $P(2,3,4)$
 $\pi: x + 2y + 3z = 6$

$$d(P, \pi) = \frac{|2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} =$$

$$= \frac{|2 + 6 + 12 - 6|}{\sqrt{14}} = \frac{|14|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

b) Se r é a reta por P que é $\perp$ a π
 $r = r(P, \vec{v}_r = \vec{v}_{\perp \pi})$ e adeterminar $M = r \cap \pi$

$$\left. \begin{array}{l} P(2,3,4) \\ \vec{v}_r = \vec{v}_{\perp \pi} = (1,2,3) \end{array} \right\} \Rightarrow r \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = 4 + 3\lambda \end{array} \right. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

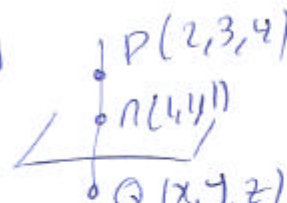
 Para achar n agorá em $R_d \in r$ e
 impoer que $R_d \in \pi$

$$R_d(2+\lambda, 3+2\lambda, 4+3\lambda) \in \pi \Rightarrow \text{verifica-se a equação}$$

$$2+\lambda + 6+4\lambda + 12+9\lambda = 6$$

$$14\lambda = -4 \Rightarrow \boxed{\lambda = -1}$$

assí dones $n = R_{\lambda=-1}(1,1,1)$

c)  n é o $\vec{v}_r$ N_j de PQ

$$\vec{OH} = \frac{\vec{OP} + \vec{OQ}}{2}$$

$$(1,1,1) = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+3}{2}, \frac{z+4}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 1 = \frac{x+2}{2} \\ x=0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} 1 = \frac{y+3}{2} \\ -1=y \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \frac{z+4}{2} = 1 \\ z=-2 \end{array} \right|$$

$\mathcal{A}$
 $Q(0,-1,-2)$

$$d) \left. \begin{array}{l} S \in S \quad S(-b, 2, 0) \\ \vec{v}_S = (1, a, 3) \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} r \subset \pi \Rightarrow \\ v_{\perp \pi} = (1, 2, 3) \end{array}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_S \perp \vec{v}_{\perp \pi} &\Rightarrow \vec{v}_S \cdot \vec{v}_{\perp \pi} = 0 \\ 1 + 2a + 9 &= 0 \\ a &= \frac{-10}{2} \\ \boxed{a = -5} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Soluci\~o} \\ a = -5 \\ b = -2 \end{array}}$$



$$\begin{aligned} S \in S &\Rightarrow S \in \pi \Rightarrow \\ r \subset \pi &\Rightarrow (-b, 2, 0) \\ \Rightarrow -b + 4 + 0 &= 6 \\ \boxed{-2 = b} \end{aligned}$$

4) Donades les rectes $r \begin{cases} y=0 \\ z=3 \end{cases}$ i $s: \frac{2x-4}{10} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{2}$

- Trobeu un punt i vector director de cadascuna
- Estudieu quina és la seva posició relativa
- Calculeu la distància de r a s
- Trobeu la recta perpendicular comuna a les dues rectes.

(0,5+1+0,75+0,75=3 punts)

4) a) $r \begin{cases} y=0 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow r = \begin{cases} x = d \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases} \forall d \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow R(0,0,3) \in r$
 $\vec{v}_r = (1,0,0)$

$s: \frac{x-2}{5} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{2} \Rightarrow S(2,-2,4) \in s$
 $\vec{v}_s = (5,1,2)$

b) $R_3(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = 2$
 $\left(\frac{1}{5} = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} \right) \text{ NO}$ $\Rightarrow$ r i s es creuen
 o es tallen
 en 1 punt.

$\vec{RS} = \vec{OS} - \vec{OR} = (2, -2, 1)$

$R_3(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{RS})$

Són l.i. $\Rightarrow$ la subm que $R_3 \geq 2$
 així doncs només cal comprovar si és 3.
 Per això hem que val el $\det(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{RS})$

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow R_3(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{RS}) = 3$

$\Rightarrow r$ i s es CREUEN (sense tallar-se)

$$c) d(r,s) = \frac{|[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{r}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{4+1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \text{ units.}$$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (0, -2, 1)$$

d) la recta $\perp$ a la coruna té per vector directe per exemple el $\vec{v}_r \times \vec{v}_s =$

$$= (0, -2, 1) = \vec{v}_t \quad \begin{matrix} \vec{r}_t \\ \vec{v}_r \\ \vec{v}_t \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} T(x,y,z) \in t \quad (\forall) \\ \vec{r}_t \\ \vec{v}_s \\ \vec{v}_t \end{matrix} \right\} \begin{cases} \begin{vmatrix} x-0 & 1 & 0 \\ y-0 & 0 & -2 \\ z-3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x-2 & 5 & 0 \\ y+2 & 1 & -2 \\ z-4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(y+2(z-3)) = 0 \\ \underline{x-2} - \underline{10z} + 40 + 0 - 0 + \\ \underline{-5y} - 10 + \underline{4x} - 8 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} +y + 2z = 6 \\ 5x - 5y - 10z = -20 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t \begin{cases} +y + 2z = 6 \\ x - \frac{5}{2} - 2z = -4 \end{cases}$$

- Si algú la calcula buscant els pts de r i S on es Recalza aquesta + CORUNA també sent molt bé

$$\left. \begin{array}{l} R_d (d, 0, 3) \in r \\ S_\mu (2+5\mu, -2+\mu, 4+2\mu) \in S \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{R_d S_\mu} \\ \parallel \\ (2+5\mu-d, -2+\mu, 4+2\mu) \end{array}$$

$$\text{ara imposen que } \left. \begin{array}{l} \vec{R_d S_\mu} \perp \vec{V_r} = (1, 0, 0) \\ \perp \vec{V_s} = (5, 1, 2) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{R_d S_\mu} \cdot \vec{V_r} = 0 \\ \vec{R_d S_\mu} \cdot \vec{V_s} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2+5\mu-d=0 \\ 10+25\mu-5d-2+\mu+2+4\mu=0 \end{array} \right\}$$

$d = 2+5\mu$ Subst en la 2a

$$30\mu - 5(2+5\mu) + 10 = 0$$

$$30\mu - 10 - 25\mu + 10 = 0$$

$$5\mu = 0 \Rightarrow \boxed{\mu=0}$$

$$R_{d=2} (2, 0, 3) \in r$$

$$\Rightarrow S_{\mu=0} (2, -2, 4) \in S$$

$$d = 2 + 5 \cdot 0 = 2 \quad \boxed{d=2}$$

I la Recta Buscada es $R_{d=2} S_{\mu=0}$ i

$$\text{La } d(r, S) = d(R_{d=2} S_{\mu=0}) = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5} \quad \text{Com ja sabem!!}$$