Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació
Institut d'Educació Secundària
Jaume Balmes

Departament de Matemàtiques
2n BATX MA
Examen Global 2n quadrimestre

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data:**

1) Trobeu les integrals següents:

a) $\displaystyle\int (x+2)\cdot \ln(x)\, dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+2x^2+x}$

(0,5+1=1,5 punts)

a) $\int (x+2)\, ln\, x\, dx$. Integrem per parts:

$$\begin{cases} u = ln\, x & \rightarrow \quad du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = (x+2)\, dx & \rightarrow \quad v = \dfrac{x^2}{2} + 2x \end{cases}$$

$$\int (x+2)\, ln x\, dx = \left(\frac{x^2}{2}+2x\right) ln\, x - \int \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\frac{1}{x}\, dx = \left(\frac{x^2}{2}+2x\right) ln\, x - \int \left(\frac{x}{2}+2\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+2x\right) ln\, x - \frac{x^2}{4} - 2x + k$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+2x^2+x}$. Descomponem en fraccions simples:

$$\frac{1}{x^3+2x^2+x} = \frac{1}{x\,(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + Bx\,(x+1) + Cx}{x\,(x+1)^2}$$

- Per a $x=0 \;\rightarrow\; 1 = A$
- Per a $x=-1 \;\rightarrow\; 1 = -C \;\rightarrow\; C = -1$
- Per a $x=1 \;\rightarrow\; 1 = 4A + 2B + C \;\rightarrow\; B = -1$

Per tant:

$$\int \frac{dx}{x^3+2x^2+x} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2}\right) dx = ln\,|x| - ln\,|x+1| + \frac{1}{x+1} + k$$

2) Trobeu l'àrea limitada entre la corba $y = x^3 - 2x^2 - 3x$ i l'eix OX.

(1,5 punts)

- Punts de tall amb l'eix X:

  $x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \;\rightarrow\; x\,(x^2 - 2x - 3) = 0 \;\rightarrow$

  $$\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases}$$

- $G(x) = \int (x^3 - 2x^2 - 3x)\; dx = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2}$

- $G(0) - G(-1) = 0 - \left(\dfrac{-7}{12}\right) = \dfrac{7}{12}$ és el primer tros de l'àrea A1

  $G(3) - G(0) = \dfrac{-45}{4} - 0 = \dfrac{-45}{4}$ que una vegada fet el valor absolut és el segon tros de l'àrea A2

- Àrea $= \dfrac{7}{12} + \dfrac{45}{4} = \dfrac{71}{6}$ u^2 és l'àrea total

3) Calculeu el valor d'aquest determinant i resoleu l'equació corresponent.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \boldsymbol{x} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{1} & \boldsymbol{x} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{1} & -\mathbf{1} & \boldsymbol{x} \end{vmatrix} = \mathbf{8}$$

(0,5 punts)

Primer calcularem el determinant*:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} (x+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} (x+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} (x+1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = (x+1)^2 (x+1) = (x+1)^3$$

Així doncs l'equació ha resoldre és $(X+1)^3=8$ ====> $(X+1)^3=2^3$ ====> X=1

4) Trobeu una matriu, **X**, tal que **A·X = B**, essent:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{i} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(0,75 punts)

Aïllem X en l'equació, multiplicant per l'esquerra per A^{-1}:

$$AX = B \;\rightarrow\; A^{-1}AX = A^{-1}B \;\rightarrow\; X = A^{-1}B$$

Comprovem que $|A| = -1 \neq 0$ i obtenim $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\left(Adj\ (A)\right)^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Per tant: $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

5) Discutiu, per als diferents valors dels paràmetres "**a**" i "**b**", i resoleu en els Discutiu aquest sistema d'equacions, per als diferents valors del paràmetre "**m**". I resoleu-lo quan sigui sistema compatible determinat (SCD):

$$\left.\begin{array}{l} x + my + (m+1)z = 3 \\ x \qquad + (m+1)z = -m+2 \\ \quad 2my + (m+1)z = m+1 \end{array}\right\}$$

(2,25 punts)

Estudiem el rang de la matriu dels coeficients:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & m+1 \\ 1 & 0 & m+1 \\ 0 & 2m & m+1 \end{vmatrix} = m(m+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -m(m+1) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

- Si $m \neq 0, -1 \rightarrow$ el sistema és SCD i la solució és

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & m & m+1 \\ -m+2 & 0 & m+1 \\ m+1 & 2m & m+1 \end{vmatrix}}{-m(m+1)} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & m+1 \\ 1 & -m+2 & m+1 \\ 0 & m+1 & m+1 \end{vmatrix}}{-m(m+1)} = \frac{m+1}{m};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 3 \\ 1 & 0 & -m+2 \\ 0 & 2m & m+1 \end{vmatrix}}{-m(m+1)} = -1$$

- Si $m = 0$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \quad com \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \ i \ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad S.I.$$

- Si $m = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \quad com \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \ i \ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ \text{==>}$$

===> S.C.I amb 1 grau de llibertat

6)
a) Trobeu l'equació general del pla p que passa pel punts:
R(0,–12,1), S(1,–10, 0) i T(–2, 0, –1)
b) El pla p talla els eixos coordenats en tres punts; A, B i C. Trobeu l'àrea del triangle amb vèrtexs en aquests tres punts.

(1 punt)

a) $p = pla(R, \overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT})$ i per tant la seva equació general és:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -2 \\ y+12 & 2 & 12 \\ z-1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$ que és 8X+4Y+16Z+32=0 que simplificant és **2X+Y+4Z+8=0**

b) Obtenim els punts de tall del pla π amb els eixos coordenats:
– Amb l'eix $X \rightarrow y = z = 0 \rightarrow x = -4 \rightarrow$ Punt A (–4, 0, 0)
– Amb l'eix $Y \rightarrow x = z = 0 \rightarrow y = -8 \rightarrow$ Punt B (0, –8, 0)
– Amb l'eix $Z \rightarrow x = y = 0 \rightarrow z = -2 \rightarrow$ Punt C (0, 0, –2)

$$\overrightarrow{AB} = (4, \ -8, \ 0) \ ; \quad \overrightarrow{AC} = (4, \ 0, \ -2)$$

$$\text{Àrea} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(16, 8, 32)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16^2 + 8^2 + 32^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1344} \approx 18{,}33 \text{ u}^2$$

7) Determineu l'equació del pla que conté la recta $r: \begin{cases} \mathbf{3x + y - 4z + 1 = 0} \\ \mathbf{-2x - y + z + 1 = 0} \end{cases}$ i és ortogonal al pla π: $5x - 2y + 4z - 2 = 0$

(1 punt)

- Busquem un punt de la recta r:
  $y = 0 \rightarrow x = 1,\ z = 1 \rightarrow R\ (1, 0, 1) \in r$

- Un vector direcció de r és:
  $\vec{d}_r = (3, 1, -4) \times (-2, -1, 1) = (-3, 5, -1)$

- Un vector normal a p és $\vec{n}(5, -2, 4)$.

- Un vector normal al pla que busquem és:
  $\vec{d}_r \times \vec{n} = (-3, 5, -1) \times (5, -2, 4) = (18, 7, -19)$

- L'equació del pla buscat serà:
  $18 \cdot (x - 1) + 7 \cdot (y - 0) - 19 \cdot (z - 1) = 0$, és a dir:
  $18x + 7y - 19z + 1 = 0$

8) Donats el punt $P(1, 0, 3)$ i el pla π: $x - y + 2z = 1$ trobeu

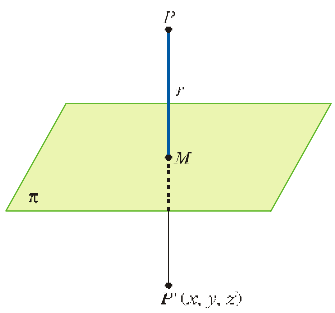
a) La distància del punt P al pla π

b) El punt simètric de P respecte del pla π.

(0,5+1=1,5 punts)

a) $d(P, \pi) = \dfrac{|1 - 0 + 6 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$.

Si es fa abans l'apartat b) també es pot trobar fent distànica(P,M)= $\left|\overrightarrow{PM}\right|$



b) Trobem la recta r que passa per P i és perpendicular al pla π.

$$\vec{d}_r = \vec{n} = (1, -1, 2)$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \quad -\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

Obtenim el punt, M, de tall de r i π:

$1 + \lambda + \lambda + 2(3 + 2\lambda) = 1 \quad \rightarrow \quad 6\lambda = -6 \quad \rightarrow \quad \lambda = -1$

$\rightarrow \quad M(0, 1, 1)$

El punt que busquem, $P'(x, y, z)$, és el simètric de P respecte de M.

Com que M és el punt mig de $\overrightarrow{PP'}$, tenim que:

$$\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z+3}{2}\right) = (0, 1, 1) \rightarrow x = -1,\ y = 2,\ z = -1 \rightarrow P'(-1, 2, -1)$$