IES Jaume Balmes, Departament de Matemàtiques
Segon examen quadrimestral de 2n batxillerat, 13/05/09

1 - Calcula l'àrea que hi ha entre les gràfiques de les funcions:
$f(x) = x^4 - 2x^2$ i $g(x) = 2x^2$
Un esquema aproximat d'aquestes gràfiques és el de la dreta.

(2 punts

2 – a) Estudia el sistema següent segons el valors dels paràmetres λ i μ.

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + \lambda z = \mu \end{cases}$$

b) Les dues primeres equacions determinen una recta, la tercera determina un pla. Estudia la posició relativa de la recta i del pla.

(apartat a 3 punts, apartat b 2 punts

3 – Per mitjà d'operacions entre matrius, sense necessitat de resoldre sistemes d'equacions, troba la matriu X d'aquesta igualtat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -2 & -1 \\ -12 & 20 \end{bmatrix}$$

(3 punts

4 – Demostra que

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd + bcd + acd + abd + abc$$

(3 punts

5 – Què és el rang d'una matriu?. Usant aquesta definició esbrina quins valors han de tenir m i n, si n'hi ha, per tal de que els tres vectors següents siguin linealment independents

$v = (1, 3, 1)$, $u = (0, 1, 0)$, $w = (m, 0, n)$

(2 punts

6 – Mira si els punts (1, 2, 3) i (0, 0,1) pertanyen o no al pla i explica el procés que fas servir

$$\begin{cases} x = 2 - 3\lambda + \mu \\ y = 3 + \lambda - \mu \\ z = 2 + 5\lambda - 3\mu \end{cases}$$

(2 punts

7 – Tenim el punt B = (1, 2, 3) i el pla $\pi: 4x - y + 2z = 6$, troba:

a) La recta r que passa per B i és perpendicular a π.
b) Una recta que passi per B i sigui paral·lela a π.
c) Punt d'intersecció de la recta r i el pla π.

(3 punts

① Trobem els punts de tall de les dues corbes que són contínues

$$\left.\begin{array}{l} y = x^4 - 2x^2 \\ y = 2x^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x^4 - 2x^2 = 2x^2 \\ x^4 - 4x^2 = 0 \end{array} \Rightarrow x^2(x^2-4)=0 \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}}$$

Així doncs l'àrea és

$$A = \left| \int_{-2}^{0} 2x^2 - (x^4 - 2x^2)\, dx \right| + \left| \int_{0}^{2} (2x^2 - (x^4 - 2x^2)\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_{-2}^{0} 4x^2 - x^4 \, dx \right| + \left| \int_{0}^{2} 4x^2 - x^4 \, dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{0}^{2} \right| = \left| +\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right| + \left| \frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right| =$$

$$= 2 \cdot \frac{64}{15} = \frac{128}{15} \, u^2$$

També es podia haver observat inicialment que l'àrea és la suma de dos trossos que són iguals, ja que les dues funcions són parelles.

$$A = A_1 + A_2 = 2A_1 = 2 \cdot \frac{64}{15} = \frac{128}{15} \, u^2$$

② a) Farem la discussió per Cramer, així doncs com la matriu quadrada és la A estudiem 1r el $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda + 8 + 2 - 12 + 2 + 2\lambda = 5\lambda$$

Així doncs Si $\lambda \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow Rg(A) = 3$

Si $\lambda = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |A| = 0 \Rightarrow Rg(A) < 3 \\ \text{Però com } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rg(A) \geq 2 \\ \Rightarrow Rg(A) = 2 \end{array} \right.$

$\boxed{\text{CAS I}}$ $\lambda \neq 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Rg(A) = Rg(A_{ampl}) = 3 \\ 3 \text{ incògnites} \end{array}\right\} \Rightarrow$ S.C.D

CAS que $\lambda = 0 \Rightarrow$ sabem que $Rg(A) = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & 0 & \mu \end{array}\right)$$

Com $\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rg(A) \geq 2 \\ \text{I no és 3 ja que } |A| = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Rg(A) = 2$

orlem aquest $M_2 \neq 0$ amb la $\vec{b}$ i F_1 per a mirar que passa amb el Rg de la matriu ampliada

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -8 \\ 1 & 0 & \mu \end{vmatrix} = 2\mu - 8 + 4 - 3\mu = -\mu - 4$$

$\boxed{\text{CAS II.a}}$ $\lambda = 0 \quad \mu \neq -4 \quad \left.\begin{array}{l} Rg\, A = 2 \\ Rg(A_{ampl}) = 3 \end{array}\right\}$ S.I

$\boxed{\text{Cas II.b}}$ $\lambda = 0 \quad \mu = -4 \quad \left.\begin{array}{l} Rg(A) = 2 \\ Rg(A_{ampl}) = 2 \end{array}\right\}$ S.C $\left\{\begin{array}{l} \text{S.C.I} \\ \text{amb 1} \\ \text{grau de} \\ \text{llibertat} \end{array}\right.$

3 INC.

$\boxed{b}$ $\lambda = 0 \Rightarrow \pi \cap r = $ Un punt ja que és S.C.D.

$\lambda = 0 \quad \mu \neq -4 \Rightarrow$ S.I $\Rightarrow \pi \parallel r$

$\lambda = 0 \quad \mu = -4 \Rightarrow$ S.C.I amb 1 grau de llibertat $\Rightarrow r \subset \pi$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |A| = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad |B| = 6 - 2 = 4 \Rightarrow \exists B^{-1}$

$C = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -2 & -1 \\ -12 & 20 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} A X \cdot B = C \\ A^{-1} A X B B^{-1} = A^{-1} C B^{-1} \\ \overset{}{I} X \overset{}{I} \\ \| \\ X \end{array}\right\} \boxed{X = A^{-1} C B^{-1}}$$

Ara només cal calcular A^{-1}, B^{-1} i operar les matrius

$$A^{-1} = \frac{(adj(A))^T}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{(adj(B))^T}{|B|} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -11 \\ -2 & -1 \\ -12 & 20 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -2 & -1 \\ -12 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -8 & 10 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 12 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}$$

④

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd + bcd + acd + abd + abc$$

F2-F1
F3-F1
F4-F1

$$= \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ -a & b & 0 & 0 \\ -a & 0 & c & 0 \\ -a & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

Desenvolupem C4

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \\ -a & 0 & 0 \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + d\left((1+a) \cdot bc + ab + ac\right) =$$

$$= abc + d(bc + abc + ab + ac) =$$

$$= abc + bcd + abcd + abd + acd =$$

$$= abcd + bcd + acd + abd + abc$$

C.V.D

(5) El Rang d'una matriu és el número de vectors Fila que són linealment independents. També es pot definir amb el vectors columna i es pot demostrar que el RANG per files = Rang per COLUMNES

Posem aquests 3 vectors com columna de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & n \end{pmatrix} \qquad \text{Com } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rg(A) \geq 2$$

a més resulta que $|A| = n - m$

Per tant $|A| \neq 0 \iff m \neq n$

Així doncs el $Rg(A) = 3 \iff m \neq n$

és a dir els 3 vectors són L.I $\iff m \neq n$

(6) $\pi = \pi(P; \vec{v}, \vec{w})$ on $P = (2,3,2)$ $\vec{v} = (-3,1,5)$ i $\vec{w} = (1,-1,-3)$

Per tant tenim moltes formes de veure així que es pregunta

1) $A(1,2,3) \in \pi \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ t.q. $\begin{cases} 1 = 2 - 3\lambda + \mu \\ 2 = 3 + \lambda - \mu \\ 3 = 2 + 5\lambda - 3\mu \end{cases}$

2)
$$\iff \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{PA} & \vec{v} & \vec{w} \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1-2 & -3 & 1 \\ 2-3 & 1 & -1 \\ 3-2 & 5 & -3 \end{vmatrix} \end{array} = 0 \iff \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0 \ ?$$

3) Trobant l'equació del pla en forma general

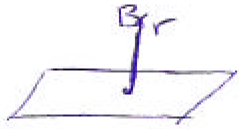
$$\begin{vmatrix} x-2 & -3 & 1 \\ y-3 & 1 & -1 \\ z-2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0 \iff 2x - 4y + 2z + 4 = 0 \iff \boxed{x - 2y + z + 2 = 0}$$

I mirant si $A(1,2,3)$ verifica l'equació $\Rightarrow 1 - 4 + 3 + 2 \neq 0 \Rightarrow A \notin \pi$

$B(0,0,1)$ $\Rightarrow 0 + 0 + 1 + 2 \neq 0 \Rightarrow B \notin \pi$

⑦ $B(1,2,3)$

$\pi \equiv 4x - y + 2z = 6$

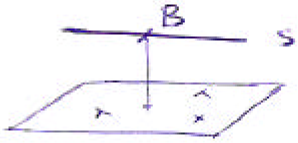


a) Recta passa per B $\perp$ π.
$\overset{\shortparallel}{r}$

$\vec{v_r} = \vec{v_{\perp\pi}} = \vec{n_\pi} = (4,-1,2)$

$$\boxed{r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}}$$

b) Recta passa per B i és $\parallel$ π.
$\overset{\shortparallel}{S}$



Trobo 3 punts del pla:

$x=0;\ y=0; \rightarrow z=3$
$P(0,0,3)$

$x=1,\ y=0; \rightarrow z=1$
$R(1,0,1)$

$x=0,\ y=-2 \rightarrow z=2$
$Q(0,-2,2)$

Trobo 1 vectors L.I.:

$\vec{PQ} = (0,-2,-1) \rightarrow \vec{v} = (0,2,1). \rightarrow$ és vector director de s.

$$\boxed{\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}}$$

c) Intersecció r, π.

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{x-1}{4} \\ \lambda = \frac{y-2}{-1} \\ \lambda = \frac{z-3}{2} \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4\lambda + 1 \\ y = 2 - \lambda \\ z = 2\lambda + 3 \end{array} \right.$$

$\downarrow$ Substituïm en el pla

$\pi \equiv 4x - y + 2z = 6$

$16\lambda + 4 - 2 + \lambda + 4\lambda + 6 = 6$

$21\lambda = -2$

$\lambda = \frac{-2}{21}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{4\cdot(-2)}{21} + 1 \rightarrow x = \frac{-8+21}{21} = \frac{13}{21} \\ y = 2 + \frac{2}{21} \rightarrow y = \frac{42+2}{21} = \frac{44}{21} \\ z = \frac{-4}{21} + 3 \rightarrow z = \frac{-4+63}{21} = \frac{59}{21} \end{array} \right.$$

Punt $r \cap \pi = \left(\frac{13}{21}, \frac{44}{21}, \frac{59}{21}\right)$