Nom i Cognoms: **Grup:** **Data: 12/5/2010**

1) Donats els vectors $\vec{u}=(1,-1,4)$, $\vec{v}=(2,1,3)$ i $\vec{w}=(1,0,0)$
   a) Determineu si són vectors linealment dependents o independents.
   b) Calculeu la relació que hi ha d'haver entre els valors de ***a*** i ***b*** per tal que el vector **(a, 1, b)** sigui combinació lineal de $\vec{u}$ *i* $\vec{v}$

(2 punts)

2) Considereu les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$
   a) Trobeu la matriu M tal que M · A = B
   b) Comproveu que $M^2=I_2$ (matriu identitat d'ordre 2) i deduïu l'expressió de M^n

(2 punts)

3) Discutiu el sistema d'equacions lineals següent en funció dels valors dels paràmetre ***m*** i solucioneu-lo en els casos en que sigui possible.

$$\begin{cases} x+y+(m-1)z=1\\ x+(m-1)y+z=m-1\\ (m-1)x+y+z=m+2\end{cases}$$

(4 punts)

4) Un quadrat de l'espai té tres dels seus vèrtexs consecutius situats en els punts de coordenades enteres P=(3, –2, 4), Q=(a, –1, a+1) i R =(2, –3, 0)
   a) Tenint en compte que els vectors $\overrightarrow{QP}$ i $\overrightarrow{QR}$ han de ser perpendiculars, calculeu el valor del nombre enter ***a***.
   b) Calculeu l'equació del pla que conté aquest quadrat.
   c) Calculeu el quart vèrtex d'aquest quadrat.
   d) Calculeu l'àrea d'aquest quadrat.

(4 punts)

5) Donats els punts P=(7, 5, 1) i el pla p : x–2y–3z=10 i la recta r: $\begin{cases}3x-2y+2z=7\\ x-6y-2z=5\end{cases}$
   a) Trobeu la distància del punt P al pla p
   b) Trobeu la distància del punt P a la recta r
   c) Trobeu la distància de la recta r al pla p
   d) Trobeu l'angle que determinen la recta r i el pla p

(4 punts)

Nom i Cognoms: **Grup:** **Data: 12/5/2010**

1) Donats els vectors $\vec{u}=(1,-1,4)$, $\vec{v}=(2,1,3)$ i $\vec{w}=(1,0,0)$

   a) Determineu si són vectors linealment dependents o independents.

   b) Calculeu la relació que hi ha d'haver entre els valors de ***a*** i ***b*** per tal que el vector **(a, 1, b)** sigui combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$

(2 punts)

a) Calculem del determinant dels 3 vectors

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 0\end{vmatrix} \overset{Desenper C3}{=} \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=3+4=7\neq 0$$ així doncs són L.I.

b) Com $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són clarament independents, ja que no són proporcionals, el que demanen és equivalent solucionar a comprovar que determinant ($\vec{u},\vec{v}$, **(a, 1, b)) =0**

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & a\\ -1 & 1 & 1\\ 4 & 3 & b\end{vmatrix}=b+8-3a-4a-3+2b=3b-7a+5=0$$

2) Considereu les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$

   a) Trobeu la matriu M tal que M · A = B

   b) Comproveu que $M^2=I_2$ (matriu identitat d'ordre 2) i deduïu l'expressió de M^n

(2 punts)

a) Podem calcular M utilitzant la matriu inversa de la matriu A,

$$M=B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/4 & 3/8\\ -1/4 & 1/8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2 & 3/4\\ 1 & 1/2\end{pmatrix}.$$

També es pot resoldre com un sistema d'equacions, posant $M=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$. Llavors,

$$\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y=1\\ -3x+2y=3\\ z+2t=2\\ -3z+2t=-2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-1/2\\ y=3/4\\ z=1\\ t=1/2\end{array}\right.$$

b) En efecte, $M^2=M\cdot M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$. Amb això, $M^n=\begin{cases}M, & \text{si } n \text{ és senar}\\ I_2, & \text{si } n \text{ és parell}\end{cases}$.

3) Discutiu el sistema d'equacions lineals següent en funció dels valors dels paràmetre ***m*** i solucioneu-lo en els casos en que sigui possible.

$$\begin{cases} x+y+(m-1)z=1 \\ x+(m-1)y+z=m-1 \\ (m-1)x+y+z=m+2 \end{cases}$$

(4 punts)

Si volem fer-ho per Gauss l'escalonem. Si el volem discutir per determinants calculem del det(sistema)

Primerament es fa l'escalonament de la matriu ampliada,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m-1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 & m-1 \\ m-1 & 1 & 1 & m+2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m-1 & 1 \\ 0 & m-2 & 2-m & m-2 \\ 0 & -m+2 & 2m-m^2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m-1 & 1 \\ 0 & m-2 & 2-m & m-2 \\ 0 & 0 & 2+m-m^2 & m+1 \end{array}\right) \; ; \; 2+m-m^2=0 \Leftrightarrow m=-1, \; m=2 .$$

S'observa que els valors que cal estudiar separadament són $m=-1$ i $m=2$.

S'arriba a la mateixa conclusió igualant a zero el determinant de la matriu de coeficients

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^3+3m^2-4 = -(m-2)^2(m+1) .$$

Llavors, quan m és diferent de 2 i de -1, el sistema és compatible determinat.

Si $m=2$, la matriu ampliada, després d'escalonar, és $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$ i el sistema és incompatible ja que la matriu de coeficients té rang 1 i l'ampliada rang 2.

Finalment, si $m=-1$ la matriu és $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ i el sistema és compatible indeterminat ja que tant la matriu de coeficients com l'ampliada tenen rang 2.

I les solucions són:

I) Si m $\neq$ 2, –1 és un SCD de solució:

$$z=\frac{m+1}{-m^2+m+2}=\frac{\cancel{(m+1)}}{-\cancel{(m+1)}(m-2)}=\frac{-1}{m-2}$$

$$y=\frac{(m-2)+(m-2)z}{(m-2)}=1+\frac{-1}{(m-2)}=\frac{m-3}{m-2}$$

$$x=1-y-(m-1)z=1-\frac{m-3}{m-2}-(m-1)\frac{-1}{(m-2)}=\frac{(m-2)-(m-3)+(m-1)}{(m-2)}=$$

$$=\frac{m-2-m+3+m-1}{(m-2)}=\frac{m}{(m-2)}$$

II) **Si m= –1 és un SCI amb 1 grau de llibertat. I agafant la incògnita z com a paràmetre tenim que:**

$$z=l \quad \forall l\in R$$

$$y=\frac{-3-3l}{-3}=1+l$$

$$x=1+2l-(1+l)=l$$

4) Un quadrat de l'espai té tres dels seus vèrtexs consecutius situats en els punts de coordenades enteres P=(3, –2, 4), Q=(a, –1, a+1) i R =(2,–3, 0)

a) Tenint en compte que els vectors $\overrightarrow{QP}$ i $\overrightarrow{QR}$ han de ser perpendiculars, calculeu el valor del nombre enter ***a***.
b) Calculeu l'equació del pla que conté aquest quadrat.
c) Calculeu el quart vèrtex d'aquest quadrat.
d) Calculeu l'àrea d'aquest quadrat.

(4 punts)

a) Si $\overrightarrow{QP}$ =(3–a, –1, 3–a) és perpendicular a $\overrightarrow{QR}$ = (2–a, –2, –a–1) aleshores el seu producte escalar és zero, així doncs

$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}$ =(3–a, –1, 3–a) · (2–a, –2, –a–1) = (3–a) (2–a) + 2 – (3–a) (a+1) =

$$= 6-5a+a^2+2+a^2-2a-3 = 2a^2-7a+5=0 \Leftrightarrow a=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{4}=\frac{7\pm 3}{4}=\begin{cases}=\frac{5}{2}\\ =1\end{cases}$$

així doncs, com a és un nombre enter, la solució és a=1

b) És el pla determinat pel punt Q i els vector $\overrightarrow{QP}$ i $\overrightarrow{QR}$ i per tant l'equació contínua és:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1\\ y+1 & -1 & -2\\ z-2 & 2 & -2\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 6x+6y-3z+6=0 \Leftrightarrow 2x+2y-z+2=0$$

c) Si anomenem S(x,y,z) al vèrtex que ens falta només cal que imposem que

$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{RS} \Leftrightarrow$ (2, –1, 2)=(x–2, y+3, z) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = x-2 & 4 = x \\ -1 = y+3 \Leftrightarrow & -4 = y \Leftrightarrow S(4,-4,2) \\ 2 = z & 2 = z \end{cases}$

d) Com és un quadrat l'àrea és la longitud d'un costat al quadrat

Àrea = $\left|\overrightarrow{QP}\right|^2 = \left(\sqrt{4+1+4}\right)^2 = 9$ unitats^2

5) Donats els punts P=(7, 5, 1) i el pla p : x–2y–3z=10 i la recta r: $\begin{cases} 3x-2y+2z=7 \\ x-6y-2z=5 \end{cases}$

a) Trobeu la distància del punt P al pla p

d(P, p)= $\dfrac{|7-2\cdot 5-3\cdot 1-10|}{\sqrt{1+4+9}} = \dfrac{16}{\sqrt{14}}$ unitats

b) Trobeu la distància del punt P a la recta r

Primer trobarem un punt i un vector director de la recta r. Solucionem el sistema d'equacions agafant com a paràmetre la y

$$\begin{cases} 3x+2z=7+2l \\ x-2z=5+6l \end{cases} \forall l \in R \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 7+2l & 2 \\ 5+6l & -2 \end{vmatrix}}{-8} = \dfrac{-14-4l-10-12l}{-8} = \dfrac{-16l-24}{-8} = 3+2l \\ y = l \qquad\qquad \forall l \in R \\ z = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 7+2l \\ 1 & 5+6l \end{vmatrix}}{-8} = \dfrac{15+18l-7-2l}{-8} = \dfrac{8+16l}{-8} = -1-2l \end{cases}$$

Un punt R(3, 0, –1) i vector director de r $\vec{v}$ = (2, 1, –2)

Així doncs la distància (P, r)=

$$= \frac{\left|\overrightarrow{RP} \wedge \vec{v}\right|}{|\vec{v}|} = \frac{\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|(-12, 12, -6)|}{3} = \frac{\sqrt{144+144+36}}{3} = \frac{\sqrt{324}}{3} = \frac{18}{3} = 6 \text{ unitats}$$

c) Trobeu la distància de la recta r al pla p

Ara anem a mirar primer la posició relativa de recta i pla. Si es tallen la distància és zero, si són paral·lels la distància és la de qualsevol punt de la recta al pla.

Un punt R(3, 0, –1) i vector director de r $\vec{v}$ = (2, 1, –2)

Un vector normal al pla p és $v_{\perp p} = (1, -2, -3)$ i un punt és A(10, 0, 0)

Mirem si $\vec{v}$ = (2, 1, –2) i $v_{\perp p} = (1, -2, -3)$ són perpendiculars

$\vec{v} \cdot v_{\perp p}$ = (2, 1, –2) $\cdot (1, -2, -3)$ = 2 – 2 + 6 = 6 $\neq 0$ per tant r i p no són paral·lels per tant es tallen.

Així doncs la distància entre la recta i el pla és zero.

d) Trobeu l'angle que determinen la recta r i el pla p

Un punt R(3, 0, –1) i vector director de r $\vec{v}$ = (2, 1, –2)

Un vector normal al pla p és $v_{\perp p} = (1, -2, -3)$ i un punt és A(10, 0, 0)

si l'angle que determinen r i p és a tenim que

$$\sin a = \frac{\left|\vec{v} \cdot \overrightarrow{v_{\perp p}}\right|}{\left|\vec{v}\right| \left|\overrightarrow{v_{\perp p}}\right|} = \frac{\left|(2,1,-2)\cdot(1,-2,-3)\right|}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{1+4+9}} = \frac{\left|2-2+6\right|}{3\sqrt{14}} = \frac{6\sqrt{14}}{3\cdot 14} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

així doncs $a = \arcsin\left(\frac{\sqrt{14}}{7}\right) = \arcsin(0{,}534522483) = 32.31^{o} = 32^{o}18'41.52''$

(4 punts)