

Problemes a l'esprint

Segon cicle d'ESO i Batxillerat. Abril 2009

Branca d'olivera. Solucions

1. 19.

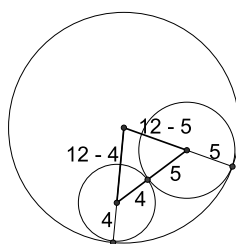
Per trobar el nombre més gran que compleix la condició que ens demanen és clar que el quocient haurà de ser tan gran com sigui possible. Però com que en aquest cas es relacionen el quocient i el residu i el residu com a màxim pot ser 2008, trobarem N com el nombre que dividit per 2009 dóna 2008 de residu i 2007 de quocient.

Aquest nombre és $N = 2009 \cdot 2007 + 2008 = 4034071$. La suma de les xifres de N és, doncs, 19.

Passa E = 19 al problema 5

2. 24.

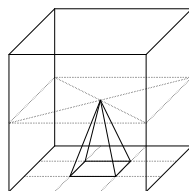
La figura mostra que, aplicant adequadament la idea de tangència, els tres costats del triangle són: la suma dels dos radis petits, el radi gran menys el radi mitjà i el radi gran menys el radi petit.



Del problema 5 passa A = 6

3. E. 4 cm^2 .

El volum d'una piràmide és $\frac{1}{3} \cdot S \cdot a$ on S és l'àrea de la base i a és l'altura de la piràmide. Si s'observa acuradament la figura, com que l'aresta del cub és 6, resulta que el costat del quadrat que és base de la piràmide és $\frac{6}{3} = 2$ i per tant serà $S = 4$ i que l'altura és $\frac{6}{2} = 3$.



4. 360.

Com que el 25% equival a $\frac{1}{4}$ i el 75% a $\frac{3}{4}$, a partir de l'enunciat resulta que la fracció de rates de cua llarga és $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{11}{40}$.

Així doncs $99 = \frac{11}{40}$ del total de rates.

Per tant el nombre demanat és $\frac{99 \cdot 40}{11} = 360$.

Colom de la pau. Solucions

Del problema 1 passa $E = 19$

5. 7462.

Si x representa el nombre d'euros que portaven, l'enunciat es tradueix així a una equació: $\frac{26}{19} \cdot x - 2009 = x$. Si es resol aquesta equació resulta $x = 5453$

però com que es demana el nombre de dòlars, aquest serà $\frac{26}{19} \cdot 5453 = 7462$.

Passa $A = 6$ al problema 3.

6. 6.

Posarem $A_1, A_2, \dots, A_{11}, A_{12}$ les persones assistents i indicarem amb $\leftrightarrow$ la relació de coneixença.

Si A_1 només coneix una persona i A_{11} les coneix totes es dedueix que $A_1 \leftrightarrow A_{11}$.

Raonant de manera semblant, com que A_2 coneix dues persones, una d'elles serà A_{11} i l'altra ha de ser A_{10} que coneix totes les persones menys una; la que no coneix és A_1 . Per tant $A_2 \leftrightarrow A_{11}$ i $A_2 \leftrightarrow A_{10}$.

Així podem anar seguint i veurem que $A_3 \leftrightarrow A_{11}, A_{10}, A_9$, que

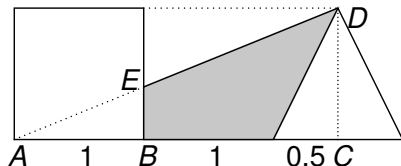
$A_4 \leftrightarrow A_{11}, A_{10}, A_9, A_8$ i que $A_5 \leftrightarrow A_{11}, A_{10}, A_9, A_8, A_7$

Quan arribem a A_6 raonarem que coneix $A_{11}, A_{10}, A_9, A_8, A_7$ però a més ha de conèixer una altra persona que no pot ser cap de A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 . Per tant $A_6 \leftrightarrow A_{12}$.

Semblantment, ja tenim escrites 6 persones conegudes de A_7 i en sabem 4 que no el coneixen. Deduïm doncs que $A_7 \leftrightarrow A_{12}$ i anàlogament es raona que $A_8 \leftrightarrow A_{12}$, $A_9 \leftrightarrow A_{12}$, $A_{10} \leftrightarrow A_{12}$ i, com ja sabíem per l'enunciat, $A_{11} \leftrightarrow A_{12}$.

7. Equips d'ESO. E. $\frac{4}{5}$.

Els triangles ACD i ABE de la figura són semblants. Per tant $\frac{CD}{AC} = \frac{BE}{AB}$ i com que $CD = AB = 1$ i $AC = \frac{5}{2}$ es dedueix que $BE = \frac{2}{5}$. Podem calcular l'àrea demanada com l'àrea del trapezi $BCDE$, que és $\frac{1 + \frac{2}{5}}{2} \cdot \frac{5}{2}$, menys la meitat de l'àrea del triangle isòsceles inicial, és a dir $\frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2}$. El resultat és el que s'ha indicat.



7. Equips d'ESO i BTX. E. $2bc$.

Pensant que aquesta és una qüestió "amb opcions", és clar que si l'enunciat s'ha de complir en general també s'haurà de complir per valors concrets que donem a a, b, c .

Si posem $a = 5, b = 4, c = 3$, que compleixen $a^2 = b^2 + c^2$, i busquem el valor de

$$\sqrt{(a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (a+c-b) \cdot (b+c-a)}$$

resulta 24, que només pot correspondre a la resposta E).

Tanmateix el que acabem de fer consisteix a "trobar només la solució per als problemes a l'esprint" però no és "resoldre el problema". És interessant veure una demostració general del que es demanava.

Si en l'expressió $\sqrt{(a+b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (a+c-b) \cdot (b+c-a)}$ agrupem el primer factor amb el quart podem aplicar la propietat de la suma per diferència i tenim $\sqrt{(b+c+a) \cdot (b+c-a)} = \sqrt{(b+c)^2 - a^2}$ i si desenvolupem i apliquem que $a^2 = b^2 + c^2$ resulta $2bc$. Semblantment agrupem el segon i el tercer factor i tenim $(a+b-c) \cdot (a+c-b) = (a+b-c) \cdot (a-(b-c)) = a^2 - (b-c)^2 = \dots = 2bc$. I arribem al resultat indicat.

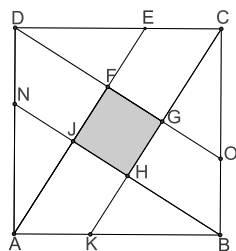
8. Equips d'ESO. 27.

Atenent al fet que es pot treballar a l'aula d'informàtica aquest és un bonic exemple per fer amb el full de càlcul. Si escrivim 59 a la cella A1, a A2, 99, a A3, 209, i a A4 la fórmula $A1+A2-A3$ i copiem aquesta fórmula per arrossegament a la columna A, veurem que a la cella A27 hi apareix 2009. Tanmateix, també podem fer-ho "a mà". Si posem a, b, c els tres primers termes de la successió, els següents són $a+b-c, 2c-a, 2a+b-2c, 3c-2a, \dots$. Deduïm que en el lloc $2+2k$ apareix el terme $k \cdot a + b - k \cdot c$ que es fa negatiu de seguida i per tant no serà en cap cas 2009 i en el lloc $3+2k$ hi tenim $(k+1) \cdot c - k \cdot a$. Si posem $a = 59$ i $c = 209$ aquesta expressió ens dona 2009 per $k = 12$, que correspon al 27è terme de la successió.

La solució, $N = 27$ passa al problema 9 per als equips només d'alumnes d'ESO.

8. Equips d'ESO i BTX. 117.

Des dels altres dos vèrtexs del quadrat fem la mateixa construcció que indica l'enunciat, mitjançant perpendiculars als segments que divideixen el quadrat en tres parts d'igual àrea. D'aquesta manera el quadrat queda dividit en quatre triangles rectangles iguals, AFD , DGC , CHB i BJA i un quadrat central.



L'àrea del paral·lelogram $AKCE$ i la del triangle AED han de ser iguals i si prenem com a base el segment comú AE , aleshores si l'altura FG del paral·lelogram és 3, la del triangle, és a dir DF , serà 6. Així veiem que els quatre triangles rectangles que hem indicat tenen catets 9 i 6 i, naturalment, el quadrat $FGHIJ$ té costat 3. Per tant l'àrea del quadrat serà: $4 \cdot \left(\frac{6 \cdot 9}{2}\right) + 3^2 = 108 + 9 = 117$.

La solució, $N = 117$ passa al problema 9 per als equips conjunts d'ESO i Batxillerat.

Solucions als reptes finals

9. Equips d'ESO. 74.

Passa $N = 27$ del problema 8. Serà $N - 3 = 24$. Com que el quocient de dividir 1000 per 27 és 37, hi ha 37 múltiples de 27 en el conjunt de nombres naturals de l'1 al 1000. De la mateixa manera veiem que hi ha 41 múltiples de 24. Com que el mínim comú múltiple de 27 i 24 és 216 els múltiples d'aquest nombre seran els múltiples comuns de 24 i 27; n'hi haurà 4. Per tant la solució del problema és $37 + 41 - 4 = 74$.

9. Equips d'ESO i BTX. 3412657.

Passa $N=117$ del problema 8 i per tant serà $n = 13$, el divisor primer més gran de N . Hem de buscar el nombre de set xifres que estarà en el lloc 169è entre els que es poden formar com diu l'enunciat.

Primer de tot considerem ordenacions amb l'esquema 12*****, on ***** ha de ser una permutació de $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ en què el 6 i el 7 no estiguin junts. En total hi ha 120 permutacions de cinc nombres, de les quals haurem de restar les que tenen junts el 6 i el 7. Si imaginem que permutem els quatre objectes $\{67, 3, 5, 5\}$ veurem que hi ha 24 permutacions que tenen el 6 i el 7 junts en aquest ordre; n'hi haurà 24 més amb el 7 i el 6 junts en l'ordre 76. Per tant són $120 - 2 \cdot 24 = 72$ les permutacions 12***** que compleixen les condicions de l'enunciat. Seguiran les 21*****, que naturalment també són 72 i després les del tipus 3 12****. Raonant de manera anàloga al que ja hem fet veurem que hi ha 12 permutacions de $\{4, 5, 6, 7\}$ en què el 6 i el 7 queden separats. A continuació hi haurà 12 permutacions més que interessin i que segueixen l'esquema 3 21****. Fins aquí ja tenim 168 permutacions. Quina és la següent que compleix l'enunciat? 3 4 12 657.

10. 60.

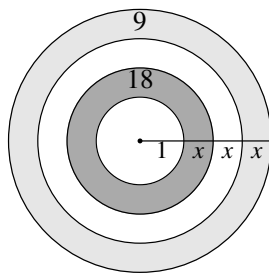
Si indiquem a, b les dimensions del rectangle interior, el nombre de peces blanques serà $a \cdot b$ i el de peces grises $2a+2b+4$. Si de l'equació $a \cdot b = 2a+2b+4$ aïllem b obtenim $b = \frac{2a+4}{a-2} = 2 + \frac{8}{a-2}$ i, si tenim en compte que a i b han de ser nombres naturals trobarem les possibilitats $a = 3, 4, 6, 10$ que ens donen, respectivament $b = 10, 6, 4, 3$. Dels rectangles corresponents el més gran (tant pel que fa a l'àrea com el perímetre) és el que té dimensions 3×10 que implica que s'hauran fet servir 30 peces blanques i 30 de grises.

Reptes voluntaris

11. 44.

Les superfícies de les quatre zones de la diana, dividides per π , són 1 , $(1+x)^2 - 1$, $(1+2x)^2 - (1+x)^2$, $(1+3x)^2 - (1+2x)^2$. Si igualem la segona i la quarta trobarem $x = \frac{2}{3}$. En aquest cas les quatre superfícies estan en proporció a $1, \frac{16}{9}, \frac{8}{3}, \frac{32}{9}$.

Si a una superfície $\frac{32}{9}$ se li assignen 9 punts, si fem les corresponents proporcionalitats inverses veurem que a una superfície de 1 unitat li corresponen 24 punts i a una superfície de $\frac{8}{3}$ li corresponen 32 punts.



12. 4.

Els set angles d'un heptàgon sumen 900° . Veurem tot seguit que el nombre màxim d'angles aguts o rectes que hi pot haver és 3.

Efectivament, si n'hi hagués 4 la suma d'aquests quatre angles seria com a màxim de 360° i, per tant, entre els altres tres haurien de sumar 540° o més cosa que implica que algun d'aquests angles (que no es poden considerar de 180° en un polígon) hauria de superar 180° i per tant l'heptàgon ja seria còncau.

Sí que és possible, en canvi, construir un heptàgon amb tres angles aguts o rectes. Per exemple amb tres angles rectes i quatre angles de $157,5^\circ$.

