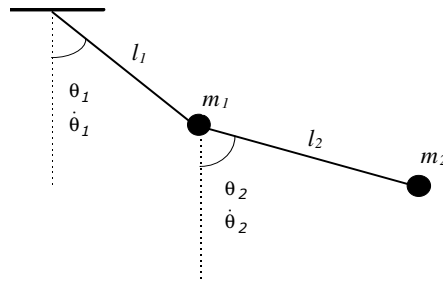


FORMULISME LAGRANGIÀ

1

EL PRINCIPI DE HAMILTON

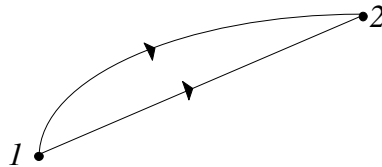
Suposarem que tenim un sistema físic de N punts materials i que el seu estat queda determinat per s *coordenades generalitzades* q_1, \dots, q_s (no necessàriament les $3N$ coordenades cartesianes dels punts) i les seves derivades temporals o *velocitats generalitzades* $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s$.



Així, veiem que al dispositiu de la figura anterior podrem determinar el seu estat a partir de les seves coordenades generalitzades θ_1, θ_2 i de les seves velocitats generalitzades $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$. El valor de s ve donat pel nombre de coordenades independents o *graus de llibertat*.

Segons el *principi de Hamilton* tot sistema mecànic queda definit per una funció $L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$, que abreujaem $L(q, \dot{q}, t)$. Aquesta funció *podria* dependre explícitament del temps i s'anomena *lagrangiana* del sistema.

Suposant que als instants t_1 i t_2 el sistema tingui les seves coordenades generalitzades $q(t_1)$ i $q(t_2)$, ens fem la pregunta següent: Quina és l'evolució de les coordenades q del sistema al llarg del temps t ?



Nosaltres podríem calcular per a cada possible trajectòria la integral següent:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

Aquesta integral s'anomena *acció* al llarg de la trajectòria.

Fixem-nos bé que el concepte de *trajectòria* es refereix a l'evolució de les coordenades generalitzades i ella s'ha d'interpretar en aquest sentit.

És evident que l'acció dependrà de la trajectòria que nosaltres elegim. Més endavant veurem que en el formulisme quàntic caldrà tenir en compte totes les trajectòries possibles. En el formulisme clàssic, que ara seguirem, només n'elegim una. *El principi de Hamilton (o d'acció) afirma que la trajectòria clàssica és la corresponent al valor extrem (màxim o mínim relatiu o local) de l'acció.*

El *càlcul de variacions* ens permet trobar les condicions que s'han de complir, perquè hi hagi un extrem a l'acció. Aquestes condicions són les *equacions d'Euler-Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \rightarrow i = 1, \dots, s$$

El conjunt de les equacions d'*Euler-Lagrange* defineix un sistema de s equacions diferencials de segon ordre amb s variables $q_i(t)$. Aquestes equacions contindran per integració $2s$ constants

arbitràries que determinarem a partir dels 2s valors inicials de les coordenades i de les velocitats generalitzades.

Aquí podem veure que la causalitat que descriuen les equacions diferencials d'*Euler-Lagrange* és una conseqüència del principi d'acció, on el sistema "coneix" globalment tota la trajectòria que seguirà al llarg del temps: *la unitat de la trajectòria total subjacent en el principi de Hamilton n'és l'element essencial del qual semblaria brollar la causalitat "aparent" entre les seves parts.* Bohm té la intuïció que, a més de la informació que dona aquest coneixement limitat, al si del món existeix realment el *significat* profund que alimenta la seva totalitat i dona forma a l'energia en el pla de la manifestació. Aquí, doncs, ja avancem un dels elements de reflexió que aniran apareixent al llarg del llibre i, fonamentalment, en l'estudi de la física quàntica: *el de la unitat que es troba al darrera de la diversitat dels fenòmens que ocorren en la nostra realitat espaciotemporal.*

Quan les N partícules del sistema no tinguin cap lligam es tindrà que $s=3N$ i podrem elegir, si volem, les $3N$ coordenades cartesianes com a coordenades generalitzades.

Coneguda L , les equacions d'*Euler-Lagrange*, deduïdes del principi d'acció de *Hamilton*, ens permetran conèixer l'evolució del sistema físic. La problemàtica fonamental està, doncs, en la determinació de la lagrangiana L . Podem avançar el que segueix i que ampliarem als apartats corresponents:

a) Les *simetries* ens condicionen la forma de la lagrangiana L . *El principi d'acció* ens dona l'evolució del sistema físic.

b) Tot l'anterior implica la conservació de certes quantitats: *les constants de moviment.*

c) Podem definir inicialment un *sistema de referència inercial* com aquell en què en els sistemes físics aïllats L posseeix l'homogeneïtat temporal i l'homogeneïtat i la isotropia espacials. L'homogeneïtat expressa el fet que un canvi en l'origen espaciotemporal és irrellevant; la isotropia ens diu el mateix en relació a les diferents direccions de l'espai.

Mentre no es digui el contrari, treballarem amb sistemes inercials. En ells, i sota determinades condicions que veurem a continuació, tenim com a constants de moviment *l'energia, l'impuls i el moment cinètic.*

L'HOMOGENEÏTAT DEL TEMPS

Si $L(t)=L(t+a)$, la lagrangiana serà temporalment homogènia i no dependrà *explícitament* del temps (la dependència a través de q i \dot{q} és implícita, però no pas explícita). Tot l'anterior ocorre quan tenim un *sistema tancat* o sotmès a un camp exterior *constant*, ja que l'origen temporal no és físicament significatiu.

L'homogeneïtat temporal implica, evidentment, que L verifiqui $\partial L / \partial t = 0$.

L'anterior, conjuntament amb les equacions d'*Euler-Lagrange*, té com a conseqüència que la quantitat

$$E = \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - L$$

sigui una constant de moviment i que, per tant, no variï al llarg del temps. Aquesta quantitat s'anomena *energia* del sistema. Els sistemes que conserven l'energia s'anomenen *conservatius*.

L'HOMOGENEÏTAT DE L'ESPAI

Treballant amb un nombre de graus de llibertat $s=3N$ (on N és el nombre de partícules), l'homogeneïtat espacial ens indica que L no variarà, si totes les partícules canvien les seves coordenades mitjançant el vector de translació $\delta \vec{e}$ comú.

Si prenem les coordenades cartesianes de les partícules com a coordenades generalitzades, apliquem les corresponents equacions d'*Euler-Lagrange* i tenim en compte l'homogeneïtat espacial de L d'un *sistema tancat*, s'arriba a la conclusió que l'expressió

$$\vec{p} = \sum_a \vec{p}_a \text{ amb } \vec{p}_a = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a}$$

es conserva (\vec{v}_a és la velocitat de la partícula a). Aquesta quantitat s'anomena *impuls* total del sistema.

Si el sistema no és tancat, però L és *invariant per translacions espacials segons la direcció z*, obtenim com a constant de

moviment el component de \vec{p} segons la direcció z *únicament* (z representa una direcció qualsevol).

A partir de les expressions \vec{p}_a dels impulsos individuals, veiem que aquests actuen additivament quan realitzem el càlcul de l'impuls total.

Per analogia amb tot l'anterior, si tenim un sistema *arbitrari* amb s coordenades generalitzades, podem definir l'impuls generalitzat $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$, corresponent a la coordenada generalitzada q_i .

Amb aquesta definició de l'impuls generalitzat podem obtenir l'energia, segons l'expressió alternativa següent:

$$E = \sum_i (\dot{q}_i \cdot p_i) - L$$

Aquesta forma d'obtenir E ens permetrà estudiar l'evolució del sistema per un camí alternatiu al vist fins ara.

LA ISOTROPIA DE L'ESPAI

La isotropia espacial en un sistema *tancat* implica que L no variarà per una rotació comuna $\delta\vec{\phi}$ de totes les partícules, en no ser físicament observable.

Amb un nombre de graus de llibertat $s=3N$, a partir de les equacions d'*Euler-Lagrange* i de la hipòtesi d'isotropia espacial s'arriba a obtenir la constant de moviment següent (\vec{r}_a és el vector de posició de la partícula a):

$$\vec{L} = \sum_a \vec{L}_a \text{ amb } \vec{L}_a = \vec{r}_a \times \vec{p}_a$$

\vec{L} s'anomena *moment cinètic o angular* del sistema.

Si el sistema no és tancat, però L és *invariant per rotacions espacials entorn de la direcció z* , obtenim com a constant de moviment el component de \vec{L} segons la direcció z *únicament*.

Comprovem que, a partir dels moments angulars individuals \vec{L}_a de les partícules, podem obtenir el moment angular total additivament.

TEOREMA DE NOETHER

Aquest teorema garanteix l'existència d'una constant de moviment quan sota determinades transformacions de les coordenades espacials i/o el temps siguin *invariants les equacions diferencials obtingudes a partir de les d'Euler-Lagrange*.

Fixem-nos en el sentit de la implicació lògica "Invariància de $L \Rightarrow$ Invariància de les equacions deduïdes de les d' $E-L$ ".

Per tant, hi ha invariàncies de les equacions d' $E-L$ que aboquen a la invariància de L , però d'altres no ho fan. Això ens indica que el teorema de *Noether* té un abast més general que el que hem vist fins ara. De fet, les conservacions de l'energia, l'impuls i el moment angular resulten casos particulars del teorema de *Noether* i no manifesten altra cosa que *el caràcter no observable dels orígens espaciotemporals i de direccions privilegiades de l'espai sota determinades condicions*.

EQUACIONS DE HAMILTON

Un sistema físic pot quedar determinat per les coordenades i els impulsos generalitzats en lloc de les coordenades i velocitats generalitzades. Fent el *canvi d'unes variables a unes altres*, arribem al que segueix:

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \cdot \dot{q}_i - L$$

$H(p, q, t)$ és l'energia del sistema en funció de les coordenades i impulsos generalitzats i s'anomena *hamiltoniana*.

Les *equacions de Hamilton* permeten el coneixement de l'evolució del sistema físic, s'anomenen *canòniques* degut a la seva simplicitat i són les que veiem a continuació:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Tenim en total $2s$ equacions diferencials de primer ordre (les equacions d'*Euler-Lagrange* eren s equacions de segon ordre).

Les $2s=s+s$ constants arbitràries que apareixen a la integració es determinen a partir del coneixement de les s coordenades i els s impulsos inicials.

Es verifica que $dH/dt = \partial H/\partial t$ i, per tant, si H no depèn explícitament del temps, serà una constant de moviment i trobem de nou la llei coneguda de la conservació de l'energia.

Qualsevol canvi de coordenades $Q_i=Q_i(q,t)$ deixa invariants les equacions d'*Euler-Lagrange* i les equacions de *Hamilton* que se'n deriven. Si treballem, però, amb el formulisme hamiltonià, un canvi arbitrari $Q_i=Q_i(p,q,t)$, $P_i=P_i(p,q,t)$ no deixa invariants, en general, les equacions de *Hamilton*, a causa dels lligams que els impulsos generalitzats tenen amb les coordenades generalitzades. Les transformacions que sí que ho fan s'anomenen *canòniques*.

És fàcil veure que el canvi de coordenades i impulsos generalitzats en l'evolució dinàmica d'un sistema físic és una transformació canònica. En efecte: al cap d'un temps t les noves coordenades i els nous impulsos generalitzats evolucionaran verificant les equacions de *Hamilton* i, per tant, estaran lligats als anteriors mitjançant una transformació canònica.

La forma de les equacions de *Hamilton* implica una certa "semblança" en el paper de les variables p , q ; això fa que p i q s'anomenin magnituds *canònicament conjugades*. De fet, pensem que amb el formulisme L les magnituds independents eren les coordenades generalitzades, mentre que les velocitats generalitzades n'eren derivades; al formulisme H , altrament, p i q actuen en pla d'igualtat.

Podem definir un *espai de fases* Γ com a una varietat de dimensió $2s$ on cada punt (p,q) representarà l'estat del sistema. Aquest punt anirà variant a través del temps. Si tenim un cert recinte format per punts representatius de condicions inicials diferents, aquest també anirà canviant. *El teorema de Liouville* afirma que el volum d'aquell recinte roman constant durant l'evolució. Com veurem més endavant, l'extraordinària sensibilitat de la majoria dels sistemes a les condicions inicials faria que, tot i la conservació del volum anterior, la seva evolució física pogués resultar *molt* diferent per causa de canvis insignificants d'aquelles condicions inicials. Aquest és el significat profund de l'efecte "papallona": el seu petit vol canviaria radicalment el nostre destí.

PARÈNTESIS DE POISSON

L'evolució d'una funció $f(p, q, t)$ verifica la llei

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \quad \text{amb} \quad \{f, H\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial p_i} \right)$$

L'expressió $\{f, H\}$ s'anomena *parèntesi de Poisson* per a f, H . De forma anàloga definim $\{f, g\}$ substituint H per g . Òbviament $\{f, g\} = -\{g, f\}$ i els parèntesis de *Poisson* són antisimètrics davant de la permutació de les derivacions en relació a les coordenades i als impulsos generalitzats.

És fàcil veure que el parèntesi de *Poisson* de dues funcions es pot expressar com

$$A^{ab} \frac{\partial f}{\partial x^a} \cdot \frac{\partial g}{\partial x^b}$$

, on A^{ab} és antisimètric i x^a i x^b representen les coordenades i els impulsos generalitzats conjuntament.

Una funció és constant de moviment, si s'anul·la l'expressió

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

Si f no depèn explícitament del temps i $\{f, H\} = 0$, f serà una constant de moviment.

Si tenim una distribució d'estats amb una densitat de probabilitat ρ a Γ , es demostra que $\partial \rho / \partial t = -\{\rho, H\} = L\rho$, que és l'*equació de Liouville* i que ens condueix de nou al *teorema de Liouville*. Si ρ és inicialment constant en Γ , $\{\rho, H\} = 0$, ρ no variarà en el temps i tindrem una *situació d'equilibri* (vegeu l'Apèndix 5).

El *teorema de Poisson* afirma que, si f i g són constants de moviment, també ho és $\{f, g\}$. L'aplicació d'aquest teorema no és il·limitada i, per tant, tampoc ho és el nombre de constants de moviment. Entre les altres propietats que verifiquen els parèntesis de *Poisson* destaquem aquestes:

$$\{q_i, q_k\} = 0 \quad \{p_i, p_k\} = 0 \quad \{q_i, p_k\} = \delta_{ik}$$

, on la *delta de Kronecker* $\delta_{ik} \neq 0$, si $i=k$, i $\delta_{ik}=0$, en cas contrari.

Es demostra que en tota transformació canònica $Q_i=Q_i(p,q,t)$ i $P_i=P_i(p,q,t)$ es compleix

$$\{f, g\}_{p,q} = \{f, g\}_{P,Q}$$

, amb la conservació de A^{ab} , i es verifica

$$\{Q_i, Q_k\}_{p,q} = 0 \quad \{P_i, P_k\}_{p,q} = 0 \quad \{P_i, Q_k\}_{p,q} = \delta_{ik}$$

Els resultats anteriors i el teorema de *Liouville* (lligat amb l'àlgebra exterior antisimètrica de la varietat de l'espai de fases) ens demostren que l'evolució d'un sistema conservarà les expressions antisimètriques corresponents. En conseqüència, la teoria moderna dels *grups de transformacions simplèctiques*, que, per definició, preserven les formes antisimètriques, facilitarà l'estudi dels sistemes dinàmics que es descriuran per mitjà d'una *varietat simplèctica* de fases que evolucionarà *simplècticament*.

L'EQUACIÓ DE HAMILTON-JACOBI

A partir d'un estat inicial el sistema evoluciona i per a cada instant posterior tenim l'acció $S=S(q,t)$ de la *trajectòria real*.

Finalment s'arriba a les equacions

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H$$

Mitjançant la substitució a $H=H(q,p,t)$ dels s impulsos generalitzats que figuren a les s primeres equacions obtenim l'*equació de Hamilton-Jacobi*:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0$$

La importància de la relació anterior (sovint anomenarem també així l'equació deduïda d'una altra a través de les substitucions ans esmentades) es farà palesa quan anem construint l'equació quàntica d'ones de *Schrödinger*, mitjançant una generalització dels conceptes associats a una ona clàssica.

L'estudi dels sistemes dinàmics a partir dels formulismes alternatius de *Hamilton* i de *Hamilton-Jacobi* és equivalent.

CLOENDA

El que hem anat desenvolupant fins ara ha tingut un grau d'abstracció molt alt. Aquesta abstracció esdevindria inútil, si ens circumscrivíssim a l'estudi d'una classe molt concreta de sistemes dinàmics. Aquest no serà ni de lluny el nostre cas i, sortosament, la descripció lagrangiano-hamiltoniana ens permetrà de manera relativament senzilla el tractament de sistemes de característiques ben diferents. La generalització "natural" del que hem vist en aquest important capítol ens ajudarà a aquesta visió diversificada a partir de principis unitaris. En concret, des dels principis contemplats aquí podrem realitzar:

- 1-Estudi conjunt de sistemes galileans i relativistes.
- 2-Formulisme lagrangia de camps.
- 3-Formulisme quàntic.

El tractament dels sistemes mecànics a partir de les lleis newtonianes convencionals no ens hauria permès realitzar-ne la generalització anterior. Això ens fa veure que l'equivalència que pugui haver-hi entre diferents formulismes matemàtics aplicats en un camp concret resulta fictícia quan ens volem endinsar en territoris molt diferents del primer. L'equivalència lingüística, en definitiva, és una il·lusió, perquè tot llenguatge apunta més enllà del que hom sembla dir en un moment determinat... i el que cal és trobar el llenguatge que apunti en la direcció correcta.

Seguint aquest camí d'extrapolació, seria possible partir d'una nova equació de *Liouville* $\partial\rho/\partial t = L\rho$ per a sistemes no hamiltonians i distribucions diferents de les de *Dirac* (que ens condueixen a trajectòries ben definides) i les característiques que apareguessin en l'operador L i en els seus valors propis podrien fonamentar la irreversibilitat (vegeu l'Apèndix 2).

Per finalitzar, cal dir que el que hem desenvolupat fins ara està limitat a l'estudi de sistemes endinsats en una realitat espaciotemporal homogènia i isotropa, amb les lleis conservatives que se'n deriven. Seria ingenu pensar que aquesta fos tota la Realitat. Fóra molt més probable que el que veiem i descrivim representés únicament un territori purament "local" d'una Realitat molt més àmplia. Les simetries podrien quedar trencades i les lleis conservatives anul·lades en aquest nivell més profund.