RELATIVITAT ESPECIAL 2

EL PRINCIPI DE RELATIVITAT

L'experiment de *Michelson-Morley* ens permet fer l'afirmació següent: la velocitat c de la llum té el mateix valor constant en tots els sistemes inercials (en ells es verifica el *principi d'inèrcia,* que tractarem amb extensió més endavant). Això foragità la presència contradictòria d'un èter, alhora subtil (ho penetrava tot) i dens (a causa de l'alta velocitat de les ones que s'hi propagaven).

A cada punt de l'espai corresponent a un cert temps direm que hi ha un *esdeveniment.* Amb els esdeveniments $P_1(t_1,x_1,y_1,z_1)$ i $P_2(t_2,x_2,y_2,z_2)$ infinitament propers, entre els quals es propaga la llum, tindrem en forma diferencial

$$ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2=0$$

Què pot ocórrer amb ds^2, quan aquest valor no és nul?

En la comparació entre ds'^2 i ds''^2 corresponents a dos sistemes inercials podem afirmar:

1-Ambdós valors coincideixen sempre en un context galileà-newtonià i, per tant, l'extensió més natural està en afirmar que ells són infinitèsims del mateix ordre i tindrem $ds''^2=r.ds'^2$.

2-L'homogeneïtat espaciotemporal i la isotropia espacial fan que r no depengui ni de les coordenades espaciotemporals, ni de la direcció de la velocitat relativa entre ambdós sistemes.

Per tant, r només dependrà del mòdul de la velocitat relativa V entre tots dos sistemes: $ds''^2=r(V).ds'^2$.

3-A causa del *principi de relativitat* no hi haurà sistemes inercials privilegiats i es verificarà $ds'^2=r(V).ds''^2$.

4-Això obliga que $r^2(V)=1$.

5-Si $V=0$, $r=1$ i per continuïtat $r(V)=1$.

6-Per tant, ds^2 no depèn del sistema inercial elegit.

L'anterior ens permet treballar en un espai afí impròpiament euclidià on cada punt o esdeveniment tindrà les coordenades

$$x^1=x \quad x^2=y \quad x^3=z \quad x^0=ct$$

Aquell s'anomena *espai de Minkowski* i li podem associar la mètrica

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

on $\eta_{\alpha\beta}$ és el *tensor mètric* que verifica

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1\,, \; \eta_{00} = 1 \text{ i } \eta_{\alpha\beta} = 0, \text{ si } \alpha \neq \beta$$

Diem que la *signatura* del tensor mètric és +,-,-,-.

Naturalment, no totes les transformacions de coordenades conserven els components del tensor fonamental. Les transformacions que no canviïn la mètrica constitueixen el *grup de Lorentz-Poincaré.* Més endavant en l'estudi de la gravitació farem l'extensió a canvis qualssevol de coordenades.

EL GRUP DE LORENTZ-POINCARÉ

Indicarem només els resultats més importants de l'estructura del grup de *Lorentz-Poincaré*:[15]

1-Les *translacions espaciotemporals* deixen òbviament invariant la forma de la mètrica. Tenim aleshores 4 paràmetres que defineixen el canvi *continu* de coordenades per translació. Si prescindim d'aquestes transformacions, tindrem el *subgrup de Lorentz.*

2-El grup de Lorentz correspondrà als canvis de base vectorial

$$\vec{e}_\alpha = \Lambda^\beta_\alpha \vec{e}_\beta$$

que deixin invariant la mètrica. A partir d'aquí tenim:

a) $Det\,\Lambda_{\alpha}^{\beta} = \pm 1$. Si el seu valor és +1, tenim les transformacions *pròpies* L_+. Si el seu valor és -1, tenim les transformacions *impròpies* L_-.

b) $|\Lambda_0^0| \geq 1$. Si $\Lambda_0^0 \geq 1$, la transformació és *ortocrona* $L^{\uparrow}$. Si $\Lambda_0^0 \leq -1$, la transformació és *no ortocrona* $L^{\downarrow}$.

Per tant, podem tenir els conjunts

$$L_+^{\uparrow},\ L_+^{\downarrow},\ L_-^{\uparrow},\ L_-^{\downarrow}$$

, els quals inclouen, *entre d'altres*, les transformacions següents:

$L_+^{\uparrow}$ conté les rotacions espacials i les transformacions degudes al moviment relatiu dels sistemes inercials.

$L_-^{\uparrow}$ conté la transformació d'inversió espacial P

$$P(x^0,x^1,x^2,x^3) = (x^0,-x^1,-x^2,-x^3).$$

$L_-^{\downarrow}$ conté la transformació d'inversió temporal T

$$T(x^0,x^1,x^2,x^3) = (-x^0,x^1,x^2,x^3).$$

$L_+^{\downarrow}$ conté les transformacions PT.

Al grup de *Lorentz* hi ha 6 paràmetres que donen lloc a les transformacions *contínues* pròpies i ortocrones.

Les transformacions que continguin inversions espacials o temporals són *discretes*.

Per composició de

$$L_+^{\uparrow},\ P \text{ i } T$$

tenim totes les transformacions del grup.

La transformació unitat és al conjunt de les transformacions pròpies i ortocrones, i els subgrups més importants són aquests:

1- $L_+^{\uparrow}$ o *grup de Lorentz restringit (propi i ortocron).*

2- $L_+^{\uparrow} \cup L_+^{\downarrow}$ *o grup propi* L_+.

3- $L_+^{\uparrow} \cup L_-^{\uparrow}$ *o grup ortocron* $L^{\uparrow}$.

4- $L_+^{\uparrow} \cup L_-^{\downarrow}$ *o grup unimodular* .

Coleman i *Mandula* provaren que no hi ha altres combinacions de simetries que les esmentades i que incloguin les realitats espaciotemporal i de moviment.

Les transformacions *ortocrones* preserven el signe de la mètrica i, per tant, el caràcter temporal (amb el sentit del temps) o l'espacial (vegeu més endavant l'espai de *Minkowski).*

El grup de *Lorentz-Poincaré* conté 10 paràmetres. Tots els seus elements poden obtenir-se per composició de:

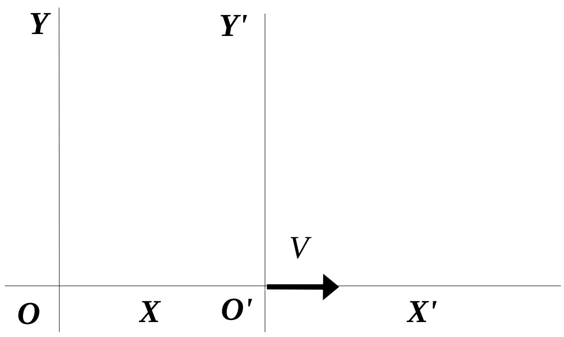
-Translacions espaciotemporals (amb 4 paràmetres).

-Inversions espacials i temporals.

-Transformacions del grup de *Lorentz* restringit (amb els 3 paràmetres de rotació dels eixos i els 3 de la velocitat relativa entre els sistemes).

A partir d'ara ens centrarem en les transformacions de $L_+^\uparrow$ obtingudes pel moviment relatiu de sistemes inercials amb velocitat constant i eixos espacials paral·lels.

LES TRANSFORMACIONS DE LORENTZ



Suposem que tenim els dos sistemes inercials de la figura superior i que el orígens coincideixen quan els temps d'ambdós sistemes valen zero. La velocitat del sistema *K'* respecte del *K* és *V* i té el sentit de les *x* positives.

Si fem una transformació lineal de coordenades que preservi la forma de la nostra mètrica i afegim la condició que l'origen *O'* amb $x'= 0$ verifiqui $\dot{x} = V$, obtenim les *transformacions de Lorentz* i, per derivació, les de velocitats (utilitzem la nomenclatura $\beta=V/c$ i en l'aproximació $c \to \infty$ i $\beta \to 0$ obtenim finalment les expressions de canvi conegudes entre *sistemes galileans*):

$$x = \frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad y = y' \quad z = z' \quad t = \frac{t'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$v_x = \frac{v_{x'}+V}{1+v_{x'}\frac{V}{c^2}} \quad v_y = \frac{v_{y'}\sqrt{1-\beta^2}}{1+v_{x'}\frac{V}{c^2}} \quad v_z = \frac{v_{z'}\sqrt{1-\beta^2}}{1+v_{x'}\frac{V}{c^2}}$$

APLICACIONS DE LES TRANSFORMACIONS DE LORENTZ

A) La dilatació del temps

Tenim un rellotge en moviment respecte d'un sistema *K.* Entre dos esdeveniments *locals* al rellotge aquest ha marcat un temps τ que anomenarem *temps propi* entre ells. Quin és el temps transcorregut entre aquests esdeveniments, segons l'observador del sistema *K?*

Si apliquem les transformacions de *Lorentz*, fem $t = t_2 - t_1$ i tenim en compte que $\tau = t'_2 - t'_1$ i $x'_2 = x'_1$, fàcilment arribem a

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Veiem, per tant, que *entre dos esdeveniments el menor temps transcorregut és el temps propi que correspon al rellotge que està present en ambdós esdeveniments.*

A partir del resultat anterior podem entendre els dos problemes següents:

1-Paradoxa dels bessons

Un dels bessons se'n va, de la Terra, i torna finalment. Quan ell contempla el seu germà comprova que aquest ha envellit... per què? El sistema del bessó terrestre és gairebé inercial a efectes pràctics, mentre que el del bessó astronauta no ho és pas. A cada instant, però, podem adjuntar un sistema inercial propi a l'astronauta. Aquest sistema inercial *va canviant al llarg de la* *trajectòria i és diferent del sistema de l'astronauta.* Tanmateix*, les diferencials dels temps propis en ambdós sistemes són iguals*. Això ens permet escriure la mètrica entre dos esdeveniments locals de l'astronauta a partir del seu temps propi:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2$$

Per tant, podrem comparar cada diferencial de temps propi de l'astronauta amb el corresponent temps no propi del bessó terrestre. Si fem, però, la *suma* corresponent entre els instants de partida i d'arribada de l'astronauta, trobem la relació entre els temps *propis* viscuts globalment pels dos bessons i que serà

$$\tau(terrestre) = \frac{\tau(astronauta)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

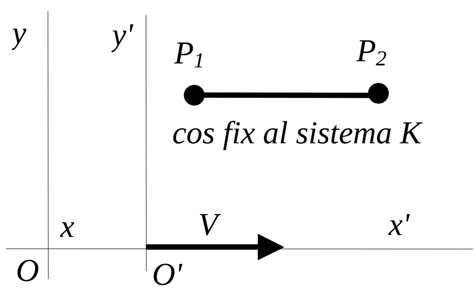
No podríem, però, invertir els dos sistemes de referència en el raonament, amb la qual cosa el bessó astronauta seria el que envelliria més de pressa? Això no és possible, ja que el sistema de l'astronauta és no inercial i, per tant*, no pot utilitzar-se permanentment al llarg de tot el temps d'anada i de tornada* per comparar-lo amb el sistema inercial terrestre.

2-Paradoxa del temps de vida dels muons

Sabem que els *muons* són partícules que ens arriben amb els raigs còsmics per interacció amb l'atmosfera.

Nosaltres coneixem el temps de vida d'un muó, però des del moment en què s'ha format un muó fins que arriba a la superfície del planeta transcorre un temps molt més gran. Com és això possible? La paradoxa és de resolució senzilla: el temps de vida és el temps propi del muó, molt més petit que el temps de vol que nosaltres mesurem en el seu recorregut.

B)Contracció de la longitud



A la figura anterior tenim un cos de longitud L mesurada per un observador K fix respecte d'ell. Quina serà la longitud L' mesurada per un observador K' que es mou en relació a K amb velocitat V? Segons la figura, el cos es mourà cap a l'esquerra en relació a K' amb una velocitat de valor numèric V.

En la mesura de la longitud del cos entre P_1P_2 des de K' serà necessari que $t'_2 = t'_1$, relació que no cal des del sistema *K unit* al cos. Si partim de les relacions $L = x_2 - x_1$ $L' = x'_2 - x'_1$ i de les transformacions de *Lorentz*, arribem a

$$L = \frac{L'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

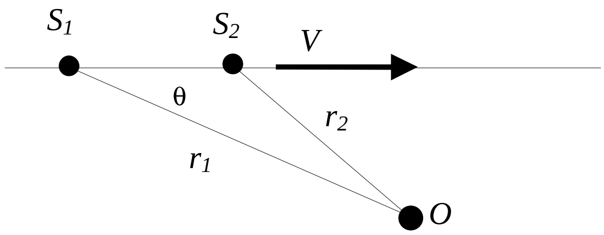
La longitud d'un cos mesurada en un sistema respecte del qual es mou és més petita que la longitud pròpia del cos. Les longituds perpendiculars al moviment, però, coincideixen.

En un disc en rotació la relació entre la longitud de la seva circumferència i el seu diàmetre mesurada per un observador situat en ell seria superior al valor π obtingut per un d'inercial en repòs. El principi d'equivalència d'*Einstein* desembocarà en la geometria no euclidiana deguda a la gravitació.

C) Efectes relativistes en les ones lluminoses

1-Efecte Doppler

Tenim una font lluminosa S que emet ones que són captades per l'observador O respecte del qual la font es mou amb velocitat V. Siguin S_1 i S_2 les posicions de la font en l'emissió de dues crestes successives de l'ona als instants t_1 i t_2 mesurats per O.



D'acord amb O la diferència dels temps d'arribada de les dues crestes serà de $t_0 = t_2 + r_2/c - (t_1 + r_1/c)$. Si la font està molt allunyada de O, $r_1 - r_2 \cong S_2S_1.\cos\theta = V.(t_2 - t_1).\cos\theta$. Si tenim en compte la relació entre t_2 - t_1 i *T,* període de l'ona mesurada des de la font,

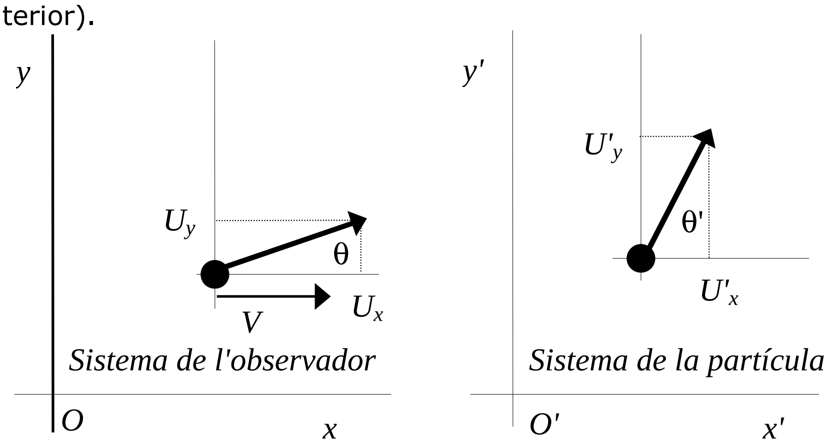
$$t_2 - t_1 = \frac{T}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

i entre el període i la freqüència d'una ona (*f=1/T)*, arribem finalment a la relació entre la freqüència f_0 mesurada per *O* i la f_s mesurada des de la font (*efecte Doppler):*

$$f_o = f_s . \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta cos\theta}$$

2-L'emissió de llum per objectes en moviment

Quan una partícula radia ones electromagnètiques per igual en totes direccions (en el sistema unit a la partícula) i la radiació és observada des d'un sistema respecte del qual la partícula es mou, aquesta isotropia desapareix i la majoria de la radiació es troba en el sentit del moviment (*aberració de la llum).* Això és una conseqüència de les transformacions relativistes de les velocitats (no confonguem aquest fenomen amb la radiació *Cerenkov*, que apareix quan una partícula es mou en un medi a una velocitat més gran que la de la llum en ell i que té un origen molt diferent de l'anterior).



Estudiem ara com canvien els components de *c* i l'angle d'emissió de la partícula que es mou amb velocitat *V* en relació a l'observador.

$$U'_x = c.cos\theta' \quad U'_y = c.sin\theta'$$

A partir de les transformacions de les velocitats en ambdós sistemes, trobem U_x i U_y i, per tant, $tg\,\theta$:

$$tg\theta = \frac{sin\theta' \,.\, \sqrt{1 - \beta^2}}{cos\theta' + \beta}$$

D'aquí es veu clarament que per a velocitats grans θ és petit i la radiació s'emet fonamentalment en el sentit del moviment de la partícula.

SOBRE LES PARADOXES RELATIVISTES

1-Per a un observador l'experiència de l'espai i del temps no varia en relació al conegut. Els conceptes, la marxa dels rellotges, les longituds dels regles de mesura,... res no ha canviat per a ell... només ho han fet les experiències comparades.

2-*Poincaré* havia batejat una teoria seva, que per manca de decisió no arribà a les conclusions revolucionàries de la d'*Einstein*, com a teoria de la relativitat. Aquest qualificatiu per a la teoria einsteniana fou desafortunat: "L'anomenada teoria de la relativitat", segons paraules del mateix *Einstein*, ens parla d'allò que és *invariable* i d'on apareix la relativitat observacional.

3-El concepte "al mateix lloc" ja era abans relatiu. Ara també ho és "al mateix instant". Un observador *A* pot experimentar ara i alhora l'esdeveniment *C* com a passat i l'observador *B* com a present, mentre que aquest pot viure l'ara de l'observador *A* i l'esdeveniment *C* com a presents: l'aparent transcurs del temps per a *A* és per a *B* una il·lusió![1]

Què significa, però, que allò que ha esdevingut lluny és simultani amb el nostre present, per exemple? Si ho pensem seriosament, veurem que a priori no vol dir absolutament res... només *els nostres prejudicis no ens permeten veure clarament que cal definir la simultaneïtat.*

Einstein ja li havia dit a *Heisenberg* que era fals que a la seva teoria només figuressin magnituds observables; la veritat era justament una altra: en una teoria física, com la de la relativitat, era aquesta la que ens deia el que podíem observar i mesurar.

4-El grup de *Lorentz-Poincaré* ens permetrà trobar lleis de la natura que tinguin alguna mena d'invariància davant de les transformacions del grup (és el mateix que passa amb la mecànica de *Newton* davant de les transformacions de *Galileu*).

5-La invariància de la mètrica davant de les transformacions esmentades ens diu que entre l'espai i el temps tenim lligams, *no identitat.* L'asimetria de la mètrica en relació a les coordenades espacials i temporals ens ho confirma. Hem de fugir de les interpretacions agosarades sobre la unitat de l'espai i el temps. Hi ha una *unitat subjacent* de la qual apareix la diferenciació.

6-Ens resultarà còmode expressar les relacions espaciotemporals per mitjà de l'espai de *Minkowski*. La quarta dimensió temporal té, però, un significat diferent de les espacials. Per arribar a la reflexió de les dimensions superiors caldrà fer-ho des de la teoria de la relativitat general.

7-El caràcter absolut s'ha transferit des de l'espai i el temps a *l'interval* ds^2.

L'ESPAI DE MINKOWSKI

Representarem els nostres esdeveniments per un punt de l'espai tetradimensional afí impròpiament euclidià de *Minkowski: l'espaitemps* (*Hamilton* havia intentat abans sense èxit la unificació *e-t,* amb els *quaternions* no commutatius $q=t+ui+vj+wk$, on $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$). Els vectors de l'espai E_4 associat s'anomenen *quadrivectors*. Podem definir tensors, utilitzar els components covariants, etc. (vegeu l'apèndix 1 sobre geometria).

Si cal, podrem treballar amb coordenades curvilínies, amb la qual cosa, naturalment, variaran els components de la mètrica.

L'*interval* ds^2 serà invariable en tots els sistemes de coordenades i l'escriurem com

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dy^\alpha dy^\beta = \eta_{\alpha\beta}dy^\alpha dy^\beta$$

, on $\eta_{\alpha\beta}$ és la mètrica de *Minkowski*.

Tenim tres menes d'intervals entre dos esdeveniments:

a) $ds^2=0$-> Els esdeveniments estan connectats per un raig de llum.

b) $ds^2 > 0$-> Els esdeveniments estan connectats pel moviment d'un punt amb velocitat $v < c$ i l'interval s'anomena *temporal.* En un interval temporal dt té sempre el mateix signe i la relació causa-efecte roman invariable.

c) $ds^2 < 0$-> Els esdeveniments estan connectats pel moviment d'un punt amb velocitat $v > c$. L'interval s'anomena *espacial.* En un interval espacial dt no té signe constant. La relació causa-efecte varia amb l'observador.**[34]**

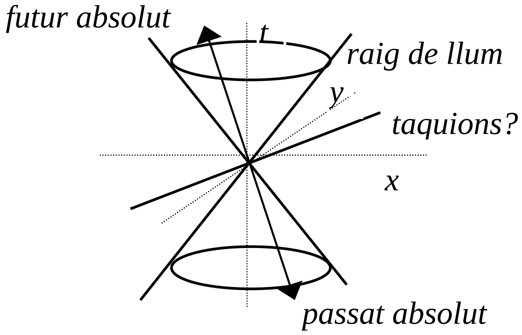
Davant d'una transformació de *Lorentz* (amb $V < c$, perquè no hi hagi expressions imaginàries) es comprova:

-Si $v = c$, la velocitat és sempre c.

-Si $v < c$, la velocitat és sempre $v < c$.

-Si $v > c$, la velocitat és sempre $v > c$. En aquest cas les partícules s'anomenen *taquions.* Si els taquions existeixen, connectaran esdeveniments on la relació causa-efecte quedarà invertida segons l'observador i, per aquesta raó, en prescindirem. El que s'afirmi en el futur, però, resta obert.**[34]**

És útil representar els esdeveniments a partir del *con de llum* de la figura següent on només s'han considerat dues coordenades espacials. Les propietats espacials o temporals dels intervals són immediates.



Els intervals que corresponguin a pendents més grans que el de la llum (dins del con de llum) seran temporals i els intervals que caiguin fora del con de llum seran espacials.

La trajectòria d'un punt a l'espai de *Minkowski* s'anomena *línia d'univers* del punt. Les línies d'univers amb el pendent més gran que el de la llum *en tots els seus punts* representaran moviments de partícules reals.

A partir d'ara *col·locarem índexs grecs quan ens referim a les quatre coordenades de Minkowski i índexs llatins per indicar les tres coordenades espacials.*

L'interval $ds^2 > 0$ corresponent a una partícula real es podrà expressar en el *sistema propi inercial instantani* adscrit (recordem la paradoxa dels bessons). En ell evidentment $dx^i = 0$ i $dt = d\tau$, on τ és el temps propi de la partícula (recordem que *la igualtat entre els diferencials de temps propis en el sistema real de la partícula i en l'inercial instantani adscrit no implica la igualtat global dels dos sistemes).* Per tant, podrem escriure, en general,

$$ds^2 = c^2.d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \quad \tau = \textit{temps propi}$$

Suposem ara el moviment d'una partícula al llarg de la seva línia d'univers. Donat que $ds^2 > 0$ podem definir la *quadrivelocitat*

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$$

De $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt^2 - v^2dt^2$, on v és la velocitat del punt material, deduïm fàcilment que

$$u^i = \frac{v^i}{c\,.\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

És immediat veure que els quatre components de la quadrivelocitat no són independents i verifiquen

$$\eta_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 1$$

Si definim la *quadriacceleració*

$$a^\alpha = \frac{du^\alpha}{ds}$$

, arribem al resultat

$$\eta_{\alpha\beta}u^\alpha a^\beta = 0$$

i, per tant, la quadrivelocitat i la quadriacceleració són ortogonals amb la mètrica de *Minkowski*.

Per finalitzar, analitzem aquesta qüestió: Què volem dir quan afirmem que una partícula té un moviment uniformement accelerat amb acceleració *a*? Amb aquesta afirmació entenem que la partícula té un moviment rectilini amb acceleració variable en un sistema inercial fix, però amb acceleració *a* constant, que podem detectar localment, *en el sistema de referència inercial propi adjunt.*

Volem ara trobar l'expressió de la mètrica en el sistema propi del punt material. A continuació indicarem el procés per arribar-hi (suposarem el moviment en el sentit de les "x^+"):

1-Trobem la quadriacceleració de la partícula en el sistema *inercial propi:*

$$(0,a/c^2,0,0).$$

2-Podem calcular la quadriacceleració de la partícula en el *sistema inercial fix* i relacionar-la amb la quadriacceleració anterior a partir de les transformacions quadrivectorials de *Lorentz* de les coordenades *(ct,x,y,z).* A partir d'aquí trobem la dependència de la velocitat v_P i de la coordenada x_P de la partícula amb el temps t_P *en el sistema inercial fix.*

Amb les condicions $t_P=0 \to v_P=0$ i $x_P=0$ tenim que

$$\frac{d}{dt_P}\frac{v_P}{\sqrt{1-v_P{}^2/c^2}}=a \Rightarrow v_P=\frac{a.t_P}{\sqrt{1+\frac{a^2.t_P{}^2}{c^2}}} \quad x_P=\frac{c^2}{a}.(\sqrt{1+\frac{a^2.t_P{}^2}{c^2}}-1)$$

Aquí veiem que, si $a.t_P \ll c$, $v_P \to a.t_P$ i $x_P \to a.t_P^2/2$, que són les expressions galileanes conegudes.

En el límit $a.t_P \to \infty$ la v_P tendeix a *c,* sense augmentar indefinidament, i la trajectòria de la partícula s'acosta asimptòticament a la recta d'equació $x_P = c.t_P - c^2/a$. Per tant, per a un observador uniformement accelerat existeix un *horitzó* definit per una superfície asimptòtica lluminosa. Des de més enllà no es pot rebre cap informació a causa del límit superior de la velocitat de la llum.

3-De la relació entre dt_P al *sistema inercial fix* i el *dt' propi* al *sistema inercial adjunt,* podem finalment trobar per integració les funcions $t_P = t_P(a,t')$ i $x_P = x_P(a,t')$ que lliguen les coordenades (x_P,t_P) de la *partícula* amb *el temps propi t',* si tenim les condicions inicials $t'=0 \rightarrow t_P=0$ i $x_P=0$:

$$t_P = \frac{c}{a}.Sh\frac{at'}{c} \qquad x_P = \frac{c^2}{a}.(Ch\frac{a.t'}{c} - 1)$$

4-A través de les transformacions de *Lorentz* entre el *sistema inercial fix* i *l'inercial propi adjunt* trobem la transformació general de coordenades $x=x(x',t',a)$, $t=t(x',t',a)$, $y=y'$ i $z=z'$ *d'un punt qualsevol* de coordenades (x,y,z,t) i (x',y',z',t') en els sistemes *inercial fix* i *local no inercial,* respectivament. Per a això caldrà tenir en compte la translació (x_P,t_P) de l'origen del sistema local i que en el sistema no inercial assignem la mateixa coordenada temporal t' als punts (x',y',z') allunyats de la partícula i que corresponguin a un valor temporal nul en les transformacions de *Lorentz.*

$$x = \frac{c^2}{a}.Ch(\frac{a.t'}{c} - 1) + \frac{x'+v.0}{\sqrt{1-v^2\ /\ c^2}} \qquad y = y' \qquad z = z'$$

$$t = \frac{c}{a}.Sh\frac{a.t'}{c} + \frac{0+vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2\ /\ c^2}}$$

5-Mitjançant l'anterior canvi de coordenades trobem la mètrica *en el sistema propi no inercial:*

$$ds^2 \ = \ (1+\frac{ax'}{c^2})^2.c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

L'exemple anterior és una mostra d'un espai afí euclidià expressat en coordenades curvilínies. Les coordenades rectilínies són les del sistema inercial fix. Les coordenades curvilínies són les del sistema no inercial accelerat associat a la partícula. Donada la mètrica anterior, podem desfer el canvi de coordenades i recuperar la mètrica de *Minkowski*. L'esmentada transformació de coordenades no conserva la forma de la mètrica de *Minkowski* i, per tant, no pertany al grup de *Lorentz-Poincaré*.