MECÀNICA RELATIVISTA 3

DINÀMICA D'UNA PARTÍCULA LLIURE

Entenem per partícula un cos material que pugui considerar-se puntual a efectes pràctics. La seva acció tindrà la forma

$$S = k.\int_a^b ds$$

on *ds* és l'interval corresponent a dos esdeveniments del punt material.

Amb l'expressió anterior assegurem la *invariància* relativista de l'acció. A partir de la relació

$$ds^2 = c^2 dt^2 - v^2 dt^2$$

, on *v* és la velocitat de la partícula en el sistema inercial elegit, obtenim una expressió de la lagrangiana *L.* Si calculem l'impuls $\vec{p}$ i fem que coincideixi amb el límit galileà, trobem $k = -m.c$ i *L:*

$$L = -mc^2.\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

, on *m* és la massa de la partícula.
A partir del valor de *L* arribem fàcilment a

$$E = \frac{m.c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \vec{p} = \frac{m.\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E.\vec{v}}{c^2} \qquad |\vec{p}|^2 + m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2}$$

, on apareix *l'equivalència entre massa i energia*.

Aquests valors es redueixen, mitjançant un desenvolupament taylorià amb $v<<c$, a les expressions

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \qquad \vec{p} = m\vec{v}$$

, on mc^2 és *l'energia en repòs.* Dins de les equacions newtonianes aquest terme és irrellevant.

La funció de *Hamilton* és

$$H = c.\sqrt{p^2 + m^2c^2}$$

Les fórmules de l'energia i l'impuls són incorrectes quan $v=c$, ja que els denominadors s'anul·len. Mirem de donar-los sentit. Definim la massa $\overline{m}$ de la partícula en moviment en funció de la massa en repòs m ($m=0$, si $v=c$)

$$\overline{m} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

D'aquí obtenim les relacions

$$E = \overline{m}.c^2 \qquad \vec{p} = \overline{m}.\vec{v}$$

Les expressions anteriors, on desapareix el zero als denominadors, són generalitzables a partícules amb $v=c$; en aquest cas es verifica

$$|\vec{p}| = E / c$$

EL QUADRIVECTOR ENERGIA-IMPULS

A partir de la quadrivelocitat podem *definir el quadrivector energia-impuls* $p^\alpha = m.c.u^\alpha$ amb

$$p^i = \overline{m}.v^i \qquad p^0 = E / c$$

La norma d'aquest quadrivector amb la mètrica de *Minkowski* val $m^2.c^2$.

Tot l'anterior és generalitzable a partícules amb *v=c* i massa en repòs *m=0;* en aquest cas la norma del quadrivector energia-impuls val zero.

Les transformacions dels components del quadrivector en canviar de sistema de referència (grup de *Lorentz-Poincaré*) i el càlcul dels components covariants a través de la mètrica responen al que ja coneixem (vegeu l'apèndix 1 sobre Geometria).

SISTEMA DE PARTÍCULES

Si tenim un sistema de partícules lliures, la seva lagrangiana serà la suma de lagrangianes del tipus anterior. És evident que

$$E = \sum_a E_a \quad \vec{p} = \sum_a \vec{p}_a$$

i que aquestes quantitats es conservaran.

Fixem-nos que al formulisme lagrangià vàrem parlar de l'additivitat de l'impuls i del moment cinètic, però mai de la de l'energia; en efecte: només en sistemes de partícules lliures l'energia és additiva en relació a les partícules.

En un sistema de partícules en interacció, però tancat globalment, tenim la conservació de l'impuls i de l'energia. L'impuls és additiu en cada instant del procés i l'energia total no coincideix, en general, amb la suma de les energies individuals. Si considerem, però, el sistema *abans i després* d'interaccionar, l'energia és additiva en relació a les de les partícules, evidentment.

La desintegració espontània d'una partícula de massa M en dos fragments de masses m_1 i m_2 en un sistema de referència on M està en repòs verificarà

$$Mc^2 = \overline{m}_1c^2 + \overline{m}_2c^2 \ amb\ \overline{m}_1 \geq m_1 \ i\ \overline{m}_2 \geq m_2$$

D'ací es dedueix que $M \geq m_1 + m_2$. En el temps de vida d'una partícula influeix, a part de la intensitat de la interacció, la diferència entre les masses inicials i finals. Si aquesta diferència augmenta, la velocitat de desintegració és més gran.

Si $M < m_1 + m_2$, la desintegració no serà espontània i caldrà subministrar exteriorment almenys *l'energia d'enllaç*

$$(m_1 + m_2 - M).c^2$$

EL QUADRITENSOR MOMENT CINÈTIC

Anàlogament al que vèiem en relació a la isotropia de l'espai tridimensional i a la conservació del moment cinètic, si tenim un sistema tancat amb una lagrangiana invariant davant de les transformacions del grup de *Lorentz* (les rotacions espacials i les corresponents a les transformacions generals de *Lorentz* degudes al moviment relatiu entre sistemes inercials), es conserva la quantitat

$$M_{\alpha\beta} = \sum_a (x_{a\alpha} . p_{a\beta} - x_{a\beta} . p_{a\alpha})$$

$M_{\alpha\beta}$ s'anomena *quadritensor moment cinètic* i és completament antisimètric. Matricialment el podem expressar així:

$$\begin{pmatrix} 0 & M_{01} & M_{02} & M_{03} \\ M_{10} & 0 & M_{12} & M_{13} \\ M_{20} & M_{21} & 0 & M_{23} \\ M_{30} & M_{31} & M_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

Els tres components M_{ij} defineixen un tensor completament antisimètric d'ordre 2 de l'espai tridimensional. El seu tensor dual és el pseudovector *moment cinètic* i tornem a trobar la llei de la seva conservació.

La conservació dels tres components M_{0i} porta a la conservació de la velocitat del punt de vector de posició

$$\vec{R} = \frac{\sum_a E_a . \vec{r}_a}{\sum_a E_a}$$

$\vec{R}$ defineix el *centre de masses* del sistema i es mou amb velocitat constant en els sistemes tancats. En el seu límit galileà $E \cong mc^2$ i tenim per al centre de masses el resultat conegut:

$$\vec{R} = \sum_a m_a \vec{r}_a \ / \sum_a m_a$$

DINÀMICA DE LA PARTÍCULA

De la definició convencional de força

$$f^i = \frac{dp^i}{dt}$$

podem, per analogia, definir *el quadrivector força*

$$F^\alpha = \frac{dp^\alpha}{dt}$$

, a partir del quadrivector energia-impuls.

De l'ortogonalitat coneguda entre la quadrivelocitat i la quadriacceleració d'un punt en resulta la de la quadrivelocitat i la quadriforça i d'aquí el *teorema de les forces vives*

$$\frac{dE}{dt} = \vec{f}.\vec{v}$$

on $\vec{v}$ és la velocitat de la partícula i E la seva energia.

Les rectes de l'espai de *Minkowski* contenen punts de quadriacceleració nul·la, corresponen a partícules aïllades no sotmeses a cap força i s'anomenen *geodèsiques. Amb totes les trajectòries entre dos punts concrets de l'espai de Minkowski el valor màxim de s i, per tant, del temps propi, és el de la trajectòria geodèsica* (això ho hem comprovat en la paradoxa dels bessons).

Si expressem l'espai en coordenades curvilínies, les equacions de les geodèsiques seran:

a) Partícules amb $v<c$:

$$\frac{d^2y^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dy^\beta}{ds}.\frac{dy^\gamma}{ds} = 0$$

b) Partícules amb $v=c$: $g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = 0$

MECÀNICA NEWTONIANA

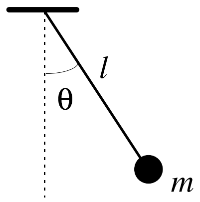
Com a cas particular de tot l'anterior, en el límit galileà anem a estudiar un sistema de partícules en interacció amb un camp gravitatori. És fàcil veure que

$$L = \sum_a \frac{1}{2} m v_a^2 - \sum_a \textit{Energia potencial}(\vec{r}_a)$$

, perquè ens condueix als resultats coneguts.

Vegem a continuació, molt de passada, dos exemples d'aplicació d'aquesta lagrangiana.

a) *El pèndol simple*



1-Formulisme estàndard:

$$mgl\sin\theta = -ml^2\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g\sin\theta}{l}$$

2-Formulisme lagrangià:

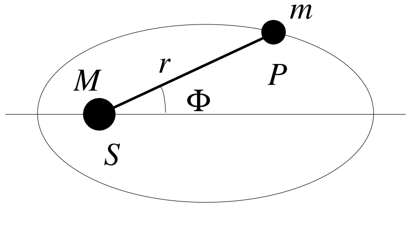
$$L = \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

3-Formulisme hamiltonià:

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta$$

Resulta un exercici senzill la deducció de l'anterior i veure que amb els formulismes *L o H* arribem al mateix resultat que amb el formulisme *estàndard.*

b) *Moviment planetari*



A la figura anterior suposem que un cos de massa *m* està sotmès a una força, en la direcció *m-M,* creada per una gran massa *M* immòbil a través d'un camp central depenent únicament de la separació *r* entre *m* i *M*.

Degut a això, el moment angular de *m* respecte del punt on *M* es troba es conserva; per tant, la trajectòria del cos de massa *m* és plana. També es demostra que les àrees escombrades en temps iguals pel radi vector que uneix *M* i *m* són iguals (*llei de les àrees*).

Elegint coordenades polars amb origen a *M,* podem trobar fàcilment la lagrangiana *L*

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\Phi}^2) + G \frac{Mm}{r}$$

, perquè *energia potencial*$_m$= *-GMm/r.*

El problema anterior és *integrable.* Sabent *L,* i a partir de les equacions d'*Euler-Lagrange*, podem trobar la trajectòria de *m*. Segons les condicions inicials, hi ha tres tipus d'òrbites:

a) El·líptica.

b) Parabòlica.

c) Hiperbòlica.

La trajectòria parabòlica ocorre *només* per a valors molt precisos dels valors inicials.

En tots els casos *M* es troba en un focus de la cònica.

En el cas de la trajectòria el·líptica es demostra que el període de translació de *m* entorn de *M* verifica

$$T = 2\pi . \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

, on *a* és el semieix major de l'el·lipse.

En conseqüència, la relació entre els períodes de revolució i les longituds dels semieixos majors serà

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{a^3}{a'^3}$$

Aquesta darrera conclusió, el fet que la trajectòria de *m* sigui una el·lipse amb focus *M* i la llei de les àrees constitueixen les tres *lleis de Kepler.*

Si la massa *M* està en moviment, la lagrangiana serà

$$L = \frac{1}{2} m\dot{\vec{r}}_m^{\,2} + \frac{1}{2} M\dot{\vec{r}}_M^{\,2} + G\frac{Mm}{|\vec{r}|}$$

, amb $\vec{r} = \vec{r}_m - \vec{r}_M$. Donat que el centre de masses roman amb la seva velocitat invariant al llarg del temps l'eligirem com a origen de coordenades. Si definim *la massa reduïda* m_R, obtenim

$$m_R = \frac{mM}{m+M} \Rightarrow L = \frac{1}{2} m_R \dot{\vec{r}}^{\,2} + G.\frac{(M+m).m_R}{|\vec{r}|} \qquad T = 2\pi.\sqrt{\frac{a^3}{G.(M+m)}}$$

Totes les consideracions anteriors són vàlides, situant el focus de l'el·lipse en el centre de masses i fent les substitucions

$$m \to m_R \quad M \to M+m$$

LA TEORIA MOND

La teoria MOND ("Modified newtonian dynamics") proposada per *Milgrom* ens dóna una explicació de les corbes de rotació de les galàxies sense la necessitat d'introduir-hi la matèria fosca de què avui es parla. Segons aquesta teoria, per a acceleracions inferiors a un cert llindar a_0 la força que actua sobre una massa seria proporcional al quadrat de la seva acceleració.

Amb el nou formulisme és fàcil veure que la velocitat de les parts més externes d'una galàxia és independent de la seva distància al centre galàctic i proporcional a l'arrel quarta de la massa interior galàctica. Amb la hipòtesi que la lluminositat de la galàxia sigui proporcional a la seva massa, recuperem la llei de *Tully-Fischer*, segons la qual la velocitat externa d'una galàxia és proporcional a l'arrel quarta de la seva lluminositat.

Amb la teoria newtoniana convencional, la velocitat lineal de rotació creix inicialment amb la distància al centre fins a un punt des d'on aquella va decreixent progressivament, en contra del que s'observa experimentalment.

Per tal d'obtenir una velocitat exterior aproximadament constant, d'acord amb les dades experimentals, cal introduir-hi la matèria fosca adient que contraresti la disminució de la velocitat ans esmentada. Això no ocorre amb la teoria MOND.

Tanmateix, la formulació *ad hoc* de la teoria *Mond* fa que aquesta no tingui gaire acceptació actualment.

EL PROBLEMA DE LA IRREVERSIBILITAT

Les equacions evolutives de la dinàmica *resulten* ser simètriques en relació al canvi de signe del temps. Malgrat això, la caiguda d'un objecte de vidre i el seu trencament posterior no tenen la contrapartida experimentalment comprovada en la qual els seus components dispersos s'ajuntin i s'enlairin espontàniament. Per què? Aquí ens comencem a plantejar una de les qüestions més fonamentals de la física: *Com poden les equacions reversibles d'evolució donar explicació de la irreversibilitat que nosaltres experimentem?* En els paràgrafs que seguiran encetarem el problema amb unes consideracions de tipus molt general sobre el que acabem de dir. Els qui ho desitgin podran ampliar un xic l'anterior a l'apartat sobre la irreversibilitat termodinàmica de l'apèndix 5 i als comentaris fets al final del capítol 1.

La *integrabilitat* del problema dels dos cossos, que acabem de veure, dóna lloc a òrbites estables tipus *Liapunov,* en què la presència d'una pertorbació infinitesimal origina també un canvi infinitesimal de la trajectòria a l'espai de les fases (no hem de confondre aquesta estabilitat amb l'*estabilitat asimptòtica* dels sistemes dissipatius en què els efectes pertorbadors són eliminats al llarg del temps). Els *sistemes dinàmics conservatius* no són, però, necessàriament integrables (com han demostrat *Burns* i *Poincaré* amb el problema *dels tres cossos*) i la introducció de *pertorbacions* planetàries pot donar lloc a grans inestabilitats orbitals en períodes llargs de temps (el teorema *KAM* de *Kolmogorov-Arnold-Moser* fixa les condicions, perquè, malgrat la no integrabilitat, aquests sistemes siguin estables en un temps acceptable). L'anterior foragitaria l'optimisme de *Laplace* quan afirmava que el seu *dimoni* podia arribar a trobar teòricament l'evolució de l'univers a partir del coneixement de les seves condicions inicials i de les lleis de la mecànica. La presència de ressonàncies, $k_1w_1+...+k_nw_n=0$ amb els k_i enters, entre les freqüències del moviment és la causa fonamental de les divergències pertorbadores. La substitució de les trajectòries per la distribució de densitat d'estats ρ vista al capítol 1 permet l'eliminació de les divergències i, ensems, l'aparició de la irreversibilitat.

El que, en qualsevol cas, hem d'afirmar és que, en general, l'estabilitat de *Liapunov* només es compleix en casos molt senzills al voltant de punts fixos d'equilibri estable (*el·líptics*), mentre que a l'entorn de punts fixos inestables (*hiperbòlics*) l'anterior no ocorre pas. L'alta concentració de punts el·líptics i hiperbòlics a l'espai de les fases de sistemes macrocòpics fa que finalment la majoria d'aquests sigui altament sensible a les condicions inicials i que a partir d'un domini fàsic infinitesimal l'evolució no porti *necessàriament* a un domini de les mateixes característiques. Amb una precisió determinada de les condicions inicials, si ultrapassem l'*horitzó temporal* marcat pel *temps de Lyapunov,* les trajectòries fàsiques divergeixen completament. L'anterior implicaria que la reversibilitat d'una trajectòria real a l'espai fàsic fos de fet, amb un grau de probabilitat molt proper a *1*, impossible en sistemes macroscòpics amb un nombre molt gran de graus de llibertat.

L'anterior és el que, en particular, ocorreria en els sistemes *dissipatius.* La irreversibilitat aparent de les equacions evolutives sorgiria a causa de l'ambient després de la seva incorporacio a la dissipació del sistema que estudiem: la irreversibilitat apareixeria per les *forces de fregament,* deduïbles des de consideracions sobre *el sistema conservatiu total* format pel sistema anterior i el seu ambient. La "impossible" recuperació de les condicions del propi ambient ens impediria la sinergia global perquè la reversibilitat total esdevingués un fet real.