ELS CAMPS 4

INTRODUCCIÓ

Fins ara hem estudiat sistemes amb *un nombre finit de graus de llibertat* i la seva lagrangiana depenia de les s coordenades generalitzades i de les s velocitats generalitzades i, potser, del temps. En l'evolució trobàvem la llei de variació de les coordenades en funció del temps.

Quan tractem amb un camp, aquest en l'evolució depèn del temps i de les tres coordenades espacials *de tot l'espai;* per tant, ens trobem amb un sistema amb *infinits graus de llibertat*.

Si tenim un nombre finit N de camps, els distingirem amb un subíndex r ($r=1,...,N$), que no té significació tensorial, altrament al que ocorre amb l'índex de x^{α}.

El camp s'expressarà mitjançant una funció

$$\Phi_r(x^0, x^1, x^2, x^3) = \Phi_r(x^{\alpha})$$

L'acció vindrà definida per

$$S = \frac{1}{c}\int_{\Omega} \mathcal{L}(\Phi_r, \Phi_{r,\alpha}, t)d\Omega$$

La integració es farà dins d'un volum tetradimensional (amb $t_1 \le t \le t_2$) i la constant $1/c$, que no afecta l'evolució, s'introdueix per la simplicitat de resultats posteriors.

Si expressem $d\Omega = \sqrt{|g|}dx^0dx^1dx^2dx^3 = cdtdV$, tenim

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V L.dV = \int_{t_1}^{t_2} Ldt$$

, on hem realitzat la primera integral sobre tot el volum espacial del camp, i podem interpretar $\mathcal{L}$ com la *densitat lagrangiana* que permet trobar L així:

$$L = \int_V \mathcal{L}.dv$$

La densitat lagrangiana dependrà dels camps, de les seves derivades parcials respecte de les quatre coordenades de l'espai de *Minkowski* i, potser, del temps. Per obtenir la invariància de l'acció, L haurà de ser escrita en forma tensorial per tal que conjuntament amb el caràcter de $d\Omega$ doni lloc a la invariància esmentada.

Cal tenir en compte que al formulisme que seguirà considerarem aquest nombre de camps:

-Camp escalar->1 camp.

-Camp vectorial (l'electromagnètic, per exemple)->4 camps.

-Camp complex->2 camps.

-Camp tensorial (el gravitatori, per exemple)->el nombre de components independents coincideix amb el nombre de camps.

LES EQUACIONS DELS CAMPS

A partir d'uns valors fixats dels camps a la frontera de Ω, l'acció serà diferent per a distintes evolucions dels camps. A l'estudi quàntic de la suma sobre històries caldrà considerar totes les configuracions dels camps a l'espai i el temps. *Clàssicament, però, la configuració real serà la que faci extrema l'acció*. El càlcul de *variacions* ens porta a les equacions dels camps (equacions d'*Euler-Lagrange*), perquè l'acció compleixi aquella condició:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{r,\alpha}}\right) = 0$$

, on $r=1,...,N,$ com hem dit abans.

Fixem-nos que ara les coordenades espacials són variables de les quals depenen els camps i que el que volem conèixer és *l'evolució dels camps i no de les coordenades.*

Dividint l'espai en un nombre *finit* de petites cel·les s'arriba a assimilar el camp en cada cel·la a una coordenada generalitzada del formulisme lagrangià amb un nombre finit de graus de llibertat vist al capítol 1. Mitjançant el pas al límit *0* del volum de cada cel·la obtenim la generalització de molts dels conceptes vistos abans i nosaltres només en donarem les conclusions finals.

Definim *l'impuls generalitzat*

$$\pi_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_r}$$

, on escrivim $\dot{\Phi}_r$ per expressar la derivada parcial en relació al temps, per simplificar.

Obtenim *la hamiltoniana total* mitjançant

$$H = \int_V \mathcal{H}.dV$$

a partir de la *densitat hamiltoniana* $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \sum_r \pi_r.\dot{\Phi}_r - \mathcal{L}$$

Amb el pas al límit ans esmentat dels parèntesis de *Poisson* en què intervenen els camps i els seus impulsos generalitzats *en cada cel·la*, trobem les relacions entre els camps Φ_r i els seus impulsos generalitzats π_r, que anomenarem novament, per analogia, parèntesis de *Poisson*. En conseqüència i com veurem al capítol 8, els parèntesis de *Poisson* on figuren Φ_r i π_r es transformaran en el procés de segona quantificació, i a través del principi de correspondència, en commutadors o anticommutadors dels operadors en què es convertiran els camps i els seus impulsos generalitzats.

Direm també que les variables Φ_r *i* π_r són *canònicament conjugades.* En concret, els seus parèntesis de *Poisson* verifiquen

$$\{\Phi_r(\vec{x},t),\pi_s(\vec{x}',t)\} = \delta_{rs}.\delta_3(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$\{\Phi_r(\vec{x},t),\Phi_s(\vec{x}',t)\} = \{\pi_r(\vec{x},t),\pi_s(\vec{x}',t)\} = 0$$

, on $\delta_3(\vec{x})$ és la funció *delta de Dirac* amb $\delta_3(\vec{x}) = 0$, si $\vec{x} \neq \vec{0}$, i

$$\int_V \delta_3(\vec{x}) d^3x = 1$$

DENSITAT LAGRANGIANA: SIMETRIES

Les simetries de $\mathcal{L}$ ens limitaran la seva forma i ens donaran les lleis de conservació. Les simetries més importants són les que són degudes a:

1-Translacions espaciotemporals.

2-Rotacions a l'espai de *Minkowski*.

3-Transformacions de fase.

Les translacions i rotacions són transformacions de les coordenades. Les transformacions de coordenades originen, generalment, variacions dels camps per dos motius:

a) Pel canvi concret de les coordenades de cada punt on definim el camp.

b) Pel canvi del camp, *independentment* de les coordenades del punt (imaginem, per exemple, un vector tridimensional sotmès a una rotació espacial, sense variar el seu punt d'aplicació).

Davant de les translacions l'efecte b) anterior és nul. Com canvien, però, els camps davant de rotacions a l'espaitemps per causa de b)? La resposta no és trivial. Veurem més endavant que l'esmentat canvi estarà *induït* a través d'una *representació del grup de transformacions* i que serà diferent segons el tipus de camp, el número dels seus components, etc.

Quant a les transformacions de *fase,* o *gauge,* es tracta de *transformacions dels camps induïdes per la representació d'un grup, però no pel canvi de les coordenades.* Als capítols que seguiran aclarirem més tot l'anterior.

La invariància de les equacions finals que obtenim a partir de les d'*E-L*, davant de transformacions molt generals de les coordenades i dels camps, assegura, mitjançant una altra versió del *teorema de Noether,* l'existència de constants de moviment. Totes les transformacions ans esmentades són un cas particular d'aquest teorema.

LES TRANSLACIONS ESPACIOTEMPORALS

En donarem només les conclusions finals que s'obtenen amb aquestes hipòtesis:

1-Les equacions d'*Euler-Lagrange* d'evolució dels camps.

2-La invariància de $\mathcal{L}$ per les translacions espaciotemporals.

El *tensor energia-impuls* $T^{\alpha\beta}$

$$T^{\alpha\beta} = \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{r,\alpha}} \frac{\partial \Phi_r}{\partial x_\beta} - g^{\alpha\beta}$$

verifica

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = 0$$

Com a conseqüència de l'anterior i mitjançant la generalització del teorema de *Gauss* que ens transforma una integral de volum tetradimensional en una integral estesa a una hipersuperfície, ara un volum tridimensional, (recordem que en E_4 una varietat amb 4, 3, 2 o 1 dimensions s'anomena hipervolum, hipersuperfície, superfície o corba, respectivament) podem definir les magnituds conservatives

$$P^\alpha = \frac{1}{c}\int_V T^{o\alpha}.dv \quad p^o = \frac{H}{c} \quad P^\alpha \to (\frac{H}{c}, p^i)$$

, que ens donen el quadrivector *energia-impuls* dels camps.

Anem ara a aclarir una sèrie d'aspectes en relació a això:

1-El tensor energia-impuls està definit en cada punt de l'espai de *Minkowski* i tenim, per tant, un camp de tensors.

2-El quadrivector energia-impuls que hem obtingut fa referència a l'energia-impuls de *tot* el camp; la integració, doncs, es realitza en el volum total del camp. Per definir el quadrivector energia-impuls no hem emprat tots els components del tensor. Quin significat tenen la resta de components i què passaria, si féssim la integració en un volum finit? Ambdues qüestions tenen una resposta conjunta: si calculem el vector energia-impuls en un volum finit i estudiem la seva variació temporal, aquesta òbviament es relacionarà amb el flux d'energia-impuls que entra o surt a través de la superfície que el limita. El flux total dependrà del flux en cada superfície infinitesimal i aquest flux elemental està relacionat amb la resta de components de $T^{\alpha\beta}$ en cada punt.

3-Existeix un altre tensor que verifiqui anàlogament

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}} = 0$$

i que doni el mateix valor del quadrivector energia-impuls?

La resposta és que el tensor no és únic i, a més, no és obligatòriament simètric. Si volem, però, que el quadritensor moment cinètic, conservat per la invariància de L per rotacions a l'espai quadridimensional, s'expressi així

$$M_{\alpha\beta} = \int_V x_{\alpha} dP_{\beta} - x_{\beta} dP_{\alpha}$$

, aleshores el tensor energia-impuls és simètric.

En coordenades curvilínies es verifica

$$T^{\alpha\beta}_{;\alpha} = 0$$

, que resulta l'extensió del resultat trobat anteriorment.

EL TENSOR ENERGIA-IMPULS D'UN SISTEMA CONTINU DE PARTÍCULES

Suposem que tenim un sistema continu de partícules (fluid). En cada punt podrem definir:

1-La *pressió* p i la *densitat* relativista ρ corresponent a una velocitat mitjana nul·la de les partícules (ambdues escalars).

2-La *quadrivelocitat mitjana* U^{α} (un quadrivector).

Substituirem inicialment el sistema continu de partícules per un de discret i partirem de l'acció d'una partícula i del resultat conegut de la *física estadística*

$$P = \frac{1}{3}\rho . < v^2 >$$

, on $<v^2>$ és la velocitat quadràtica mitjana de les partícules que tenen una velocitat mitjana nul·la i ρ és la densitat definida abans que inclou l'efecte de les velocitats *internes* d'aquelles.

Finalment podrem, amb la recuperació del conjunt continu (fluid) i amb les transformacions relativistes perquè la velocitat mitjana no sigui nul·la, arribar al coneixement del nostre tensor energia-impuls

$$T^{\alpha\beta} = (P + \rho . c^2) U^{\alpha} U^{\beta} - P . g^{\alpha\beta}$$

Aquest resultat és vàlid per a fluids *perfectes*, sense cap altra tensió interna que la pressió i exempts, per tant, de viscositat. Es tracta d'una expressió vàlida en coordenades curvilínies i, en particular, és aplicable a fluids on totes les partícules tinguin la mateixa velocitat, amb $<v^2>=0$ en el sistema globalment en repòs, la qual cosa és equivalent que la pressió $P=0$.

EL CAMÍ CAP A L'ELECTROMAGNETISME, LA GRAVITACIÓ I ELS CAMPS QUÀNTICS

Com dèiem a la cloenda del capítol 1, el formulisme lagrangià ens permet l'estudi conjunt de sistemes molt diversos. Això serà possible, com abans comentàvem, gràcies a la bondat del formulisme que ens permet a partir de la seva "correcta" direcció inicial caminar cap a diferents alternatives.

Primerament aplicarem el formulisme lagrangià als camps clàssics electromagnètics i gravitatoris.

L'estudi de l'electromagnetisme ens iniciarà en les teories *gauge*, que més endavant ens permetran un coneixement quàntic de les diferents interaccions.

La presència del tensor energia-impuls dins de les equacions de camp de la *teoria de la relativitat general* ens conduirà a les seves aplicacions gravitacionals i cosmològiques.

Finalment, tot el formulisme lagrangià serà generalitzat per a l'estudi dels camps quàntics i es veuran noves simetries de $\mathcal{L}$ amb les lleis corresponents de conservació.