ELECTRO MAGNETISME 5

DINÀMICA DE PARTÍCULES EN UN CAMP ELECTROMAGNÈTIC

En mecànica newtoniana la introducció d'un camp que transmeti les forces és un pur artifici matemàtic. En mecànica relativista, però, el camp té una entitat física real degut a la velocitat finita de propagació de les interaccions: un canvi en la posició d'una partícula que interacciona amb una altra no influeix instantàniament en aquesta, que únicament està sotmesa a l'acció del camp existent en el punt on ella es troba en aquell instant.

La interacció del *camp electromagnètic* amb una partícula depèn de *la càrrega e* de la partícula i d'un quadrivector A^{α}, representatiu del camp, anomenat *quadripotencial* del camp.

L'acció que controla l'evolució d'una càrrega elèctrica en el si d'un camp electromagnètic s'obté sumant a l'acció de la partícula lliure l'acció de la interacció

$$-\frac{e}{c}\int_a^b A^{\alpha} dx_{\alpha}$$

, on c s'ha introduït d'acord amb el sistema d'unitats elegit.

L'acció total de la partícula serà

$$S = \int_a^b (-mcds - \frac{e}{c} A^{\alpha} dx_{\alpha})$$

, que és un escalar relativista. Definint $A^{\alpha} = (\Phi, \vec{A})$, tenim que

$$S = \int_a^b (-mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}.\vec{v} - e.\Phi)dt$$

$\vec{A}$ s'anomena *potencial vector* i Φ *potencial escalar.*

D'aquí deduïm la lagrangiana de la càrrega elèctrica

$$L = -mc^2.\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\vec{A}.\vec{v} - e.\Phi$$

L no és un escalar invariant relativista, només ho és l'acció.

Si $\vec{\boldsymbol{p}}$ és l'impuls generalitzat i $\vec{p}$ l'impuls de la partícula, podem arribar a les conclusions següents:

$$\vec{\boldsymbol{P}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\vec{A} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}$$

$$p^\alpha = (\frac{E_m}{c}, \vec{p}) \qquad \boldsymbol{P}^\alpha = (\frac{H}{c}, \vec{\boldsymbol{P}}) = p^\alpha + \frac{e}{c}A^\alpha$$

$$H = \vec{v}.\vec{\boldsymbol{P}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e.\Phi = \sqrt{m^2c^4 + c^2(\vec{\boldsymbol{P}} - \frac{e}{c}\vec{A})^2} + e\Phi$$

Per a velocitats petites tenim els valors newtonians

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}.\vec{A}.\vec{v} - e\Phi \quad \vec{p} = m\vec{v} = \vec{\boldsymbol{P}} - \frac{e}{c}.\vec{A} \quad H = \frac{1}{2m}(\vec{\boldsymbol{P}} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 + e\Phi$$

Si calculem $(H\text{-}e\Phi)^2$ i anomenem $R_\alpha = S_{,\alpha} + (e/c).A_\alpha$, arribem finalment a obtenir l'equació de *Hamilton-Jacobi*

$$R^\alpha.R_\alpha = m^2c^2$$

Definint $\vec{E} = -(1/c)\partial\vec{A}/\partial t - \nabla\Phi$ i $\vec{H} = rot\,\vec{A}$, *camp elèctric i magnètic* respectivament, obtenim la *força de Lorentz*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v}x\vec{H}$$

, que actua sobre la partícula.

A partir de $E_m = mc^2 \ / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ obtenim

$$\frac{dE_m}{dt} = e.\vec{E}.\vec{v} \Rightarrow \Delta E_m = \int e.\vec{E}.\vec{v}.dt$$

, que és l'expressió del *teorema de les forces vives.* Aquest teorema ens indica que només la força del camp elèctric produeix treball mecànic; la força produïda pel camp magnètic és perpendicular a la velocitat de la partícula i únicament canvia la seva direcció, però no pas el seu mòdul. Aquesta darrera propietat és utilitzada a l'*espectròmetre de masses*: la massa molt precisa d'una molècula condiciona la seva exacta trajectòria quan, prèviament ionitzada, travessa un camp magnètic, tot permetent la seva plena identificació.

És fàcil comprovar que, si un moviment és possible en un camp electromagnètic, també ho és el moviment oposat, si el sentit dels camps s'inverteix.

Definim el *tensor camp electromagnètic* $F_{\alpha\beta}$ antisimètric

$$F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}$$

, que matricialment és

$$\begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

Sabent com es transforma tensorialment $F_{\alpha\beta}$, trobarem les lleis de transformació dels camps elèctric i magnètic.

Els camps elèctric i magnètic resulten, a través de $F_{\alpha\beta}$, aspectes d'un mateix fenomen, com a components d'aquell tensor. *La unificació de l'electricitat i del magnetisme* serà assolida a través de l'escriptura tensorial de les expressions corresponents i del seu canvi amb les transformacions del grup de *Lorentz*. Això quedarà més de manifest quan estudiem les *equacions de Maxwell.*

Amb el tensor mixt $F^{\beta}{}_{\alpha} = F_{\gamma\alpha}.g^{\gamma\beta}$ obtenim l'equació

$$mc\frac{du^{\alpha}}{ds} = \frac{e}{c}F^{\alpha}{}_{\beta}u^{\beta}$$

Aquesta equació, escrita tensorialment en forma compacta, reuneix les equacions corresponents a la força de *Lorentz* i al teorema de les forces vives. La invariància en la forma davant de les transformacions del grup de *Lorentz* s'anomena *covariància.*

TRANSFORMACIONS GAUGE

En l'evolució d'una partícula no intervé el quadripotencial. Únicament els camps influeixen en aquella. Una variació dels potencials que deixi invariants els camps no afectarà el moviment. Això ens dóna certa llibertat a l'hora d'elegir els potencials. És fàcil veure que la transformació

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\varphi \quad \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad \textit{, amb } \varphi(\vec{r},t) \textit{ un camp escalar qualsevol,}$$

deixa invariants els camps.

L'anterior ens permet reduir un camp electromagnètic a un camp magnètic pur fent

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \Phi$$

No és possible, en general, reduir-lo a un camp elèctric pur en haver d'imposar massa condicions a φ per anul·lar els tres components de $\vec{A}$.

Aquesta possibilitat d'elecció de determinades variables en una teoria per facilitar-nos l'assoliment de resultats i, en definitiva, la seva invariància davant d'aquells canvis s'anomena *invariància d'escala, de calibrat, d'aforament, de galga o "gauge".* La transformació concreta que realitzem i que deixa invariant l'evolució s'anomenarà *transformació de galga o gauge.*

Suposem ara que tenim un potencial vectorial nul. La transformació $\Phi' = \Phi + k$, *independent del punt de l'espaitemps* considerat, deixa invariant el camp elèctric. Diem aleshores que tenim *una invariància gauge global*.

Si en lloc de *k* col·loquem *k(x* $^{\alpha}$*) arbitrària,* podem expressar

$$k(x^{\alpha}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} \Rightarrow \varphi(x^{\alpha}) = -c\int k(x^{\alpha})dt$$

i introduir el potencial vectorial $\vec{A}' = \nabla\varphi$.

Hem transformat la invariància global en una invariància gauge local. Això comporta l'aparició d'un nou camp que es transformi de manera que compensi exactament el canvi local.

Més endavant veurem que les interaccions quàntiques fonamentals ens apareixen quan la invariància gauge global es transforma en local, o simplement *gauge,* mitjançant la introducció de nous camps.

Per resumir, podem dir que, a part de les invariàncies relativistes per canvi de coordenades, en són essencials les següents:

a) *Invariància gauge global* davant de transformacions dels camps que depenguin de paràmetres *constants.*

b) *Invariància gauge local, o simplement gauge*, davant de transformacions dels camps que depenguin de paràmetres que siguin *funció* del punt de l'espai de *Minkowski*.

Repetim una vegada més que les transformacions gauge no actuen sobre les coordenades, sinó sobre els camps a través d'una representació del grup de transformacions, que més endavant concretarem. L'electromagnetisme és una teoria amb invariància gauge.

LES EQUACIONS DEL CAMP

A partir de les expressions dels camps elèctric i magnètic

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\Phi \qquad \vec{H} = rot\,\vec{A}$$

deduïm *el primer parell d'equacions de Maxwell*:

$$rot\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad div\ \vec{H} = 0$$

Aplicant el *teorema de Gauss*, tindrem

$$\int_V div\ \vec{H}.dV = \int_\sigma H.\vec{d}\sigma = 0$$

i, per tant, *el flux del camp magnètic a través d'una superfície tancada serà nul*.

Segons el *teorema de Stokes*, es verifica

$$\oint \vec{E}.d\vec{r} = \int_\sigma rot\ \vec{E}.\vec{d}\sigma = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma \vec{H}.\vec{d}\sigma$$

Per tant, *la circulació del camp elèctric al llarg d'una línia tancada (força electromotriu) s'obté a partir de la variació temporal del flux del camp magnètic a través d'una superfície que recolzi sobre la línia, segons la regla del tirabuixó (llei de Faraday), i amb el seu sentit s'oposa a la variació del flux que és la causa que l'ha produïda (llei de Lenz).*

El primer grup de les equacions de Maxwell escrit tensorialment és aquest

$$F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0$$

Aquestes equacions no determinen completament el camp: no hi figura, per exemple, la derivada temporal del camp elèctric.

Per trobar *el segon grup d'equacions de Maxwell* caldrà ampliar l'acció, d'acord amb el que seguirà.

Fins ara l'acció tenia dos termes: l'acció de les partícules lliures i la de la interacció entre el camp i les partícules.

Per conèixer l'evolució del camp caldrà afegir a l'acció un terme amb propietats exclusives del camp. Aquest terme haurà de verificar *la invariància relativista* i donar lloc a equacions lineals dels camps que compleixin el *principi de superposició,* que es comprova experimentalment: el camp produït per diferents càrregues és la suma dels camps produïts per cada càrrega individual. N'elegirem la densitat lagrangiana

$$\mathcal{L}_{camp} = \frac{-1}{16\pi} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

El factor elegit és el corresponent al *sistema d'unitats de Gauss;* si el factor fos -*1/4*, operaríem en el *sistema de Heaviside.* Hi ha avantatges i inconvenients en ambdós sistemes: en el de *Gauss la llei de Coulomb* és senzilla, però apareix el factor π a les equacions del camp, mentre que en el de *Heaviside* les equacions del camp són senzilles i el factor π apareix a la llei de *Coulomb*.[41]

L'acció total valdrà

$$S=S_1(partícules)+S_2(interacció)+S_3(camp)$$

L'evolució de les partícules s'obté de S_1+S_2 i les del camp de S_2+S_3. Anem ara a modificar S_2 tot passant del conjunt discret de partícules a un de continu.

A partir de la densitat de càrrega μ, definim *el quadrivector corrent elèctric* (tinguem en compte que μ no és un escalar, però sí que ho és μdV, ja que la càrrega total dins *dV* és un invariant)

$$\vec{j}=\mu.\vec{v} \quad s^{\alpha}=(c.\mu,\vec{j})$$

Calculant la variació de càrrega elèctrica, continguda en un volum, deguda al flux a través d'una superfície que el cobreixi, arribem, per aplicació del teorema de *Gauss*, a *l'equació de continuïtat*

$$div\,\vec{j}+\frac{\partial\mu}{\partial t}=0$$

, que escrita tensorialment resulta ser

$$s^{\alpha}_{,\alpha}=0$$

Amb l'anterior, tenim per a S_2+S_3 la densitat lagrangiana

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{c}A_{\alpha}.s^{\alpha}-\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$$

A partir d'aquí trobem les equacions d'*Euler-Lagrange*, que ens condueixen al *segon grup d'equacions de Maxwell*

$$rot\,\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad div\,\vec{E}=4\pi\mu$$

i que, escrites tensorialment, són

$$F^{\alpha\beta}_{,\beta} = \frac{4\pi}{c}.s^{\alpha}$$

A la física clàssica les magnituds fonamentals són els camps, no el quadripotencial. Més endavant, en estudiar l'efecte quàntic *Aharonov-Bohm*, veurem que en física quàntica la magnitud fonamental és el quadripotencial.

Finalment, d'acord amb el formulisme lagrangià, podem calcular el tensor energia-impuls corresponent a l'acció total. A partir de les consideracions fetes al capítol 4 arribem a les conclusions següents:

1-La *densitat d'energia* del camp electromagnètic és

$$W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}$$

2-Definim *el vector de Poynting*

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}x\vec{H}$$

3-La *llei de conservació de l'energia* s'expressa així

$$\frac{\partial}{\partial t}(\int_V \frac{E^2 + H^2}{8\pi}dV + \sum_a E_{m_a}) = \int_\sigma \vec{S}.\vec{d}\sigma$$

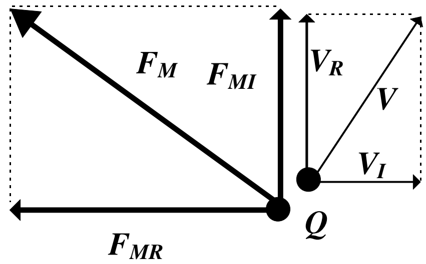
i el vector de *Poynting* permet trobar el flux energètic a través d'una superfície; aquell s'anul·la a l'infinit i arribem a la conservació de l'energia total de les partícules i del camp a *tot l'espai.*

EL MAGNETISME I L'ENERGIA MECÀNICA

Aquí volem reflexionar *qualitativament* sobre la paradoxa aparent que un camp magnètic pugui transmetre energia mecànica a les càrregues elèctriques, quan sabem que la seva força de *Lorentz* és perpendicular a les velocitats d'aquelles i, per tant, no produeix treball. En particular, tractarem aquesta problemàtica en l'estudi d'un motor elèctric de corrent continu i dels materials diamagnètics, paramagnètics i ferromagnètics.

a) Convertidor electromecànic d'energia

A la figura que segueix considerem una càrrega elèctrica Q amb les velocitats V_I i V_R corresponents al corrent elèctric i a la rotació del motor de corrent continu, respectivament. Q està sotmesa a la força $F_M=(F_{MR}, F_{MI})$ produïda pel camp magnètic de l'inductor.

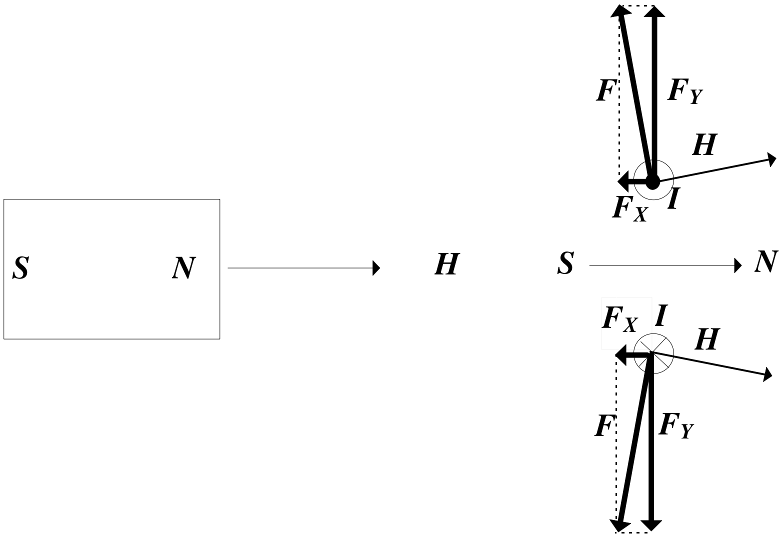


Es veu fàcilment que la força F_M no produeix treball mecànic degut que els treballs positiu i negatiu procedents respectivament de F_{MI} i F_{MR} es compensen exactament. El treball negatiu de F_{MR} és l'originat per la força contraelectromotriu que absorbeix l'energia elèctrica generada des de la xarxa elèctrica i que, en definitiva, es converteix en energia mecànica a través de la força que el camp magnètic exerceix sobre el corrent elèctric, *com si* l'origen del treball mecànic estigués en el camp magnètic.

b) Forces exercides per un camp magnètic sobre els materials paramagnètics, ferromagnètics i diamagnètics

Recordem que en el si dels materials paramagnètics o ferromagnètics el camp magnètic augmenta lleugerament o forta, respectivament, en relació al camp magnètic en el buit. Altrament, en els materials diamagnètics el camp magnètic original disminueix, lleugerament en general.

A la figura següent tenim representada esquemàticament l'acció *inicial F* del camp magnètic *H* creat per un imant sobre els corrents electrònics *I* d'una substància paramagnètica o ferromagnètica, que reforcen el camp magnètic exterior. Les forces F_Y es compensen mútuament i tendeixen a augmentar la secció electrònica. L'anterior origina la variabilitat del camp magnètic total i l'aparició d'un camp elèctric induït, amb la propietat que *la suma de les energies d'ambdós camps disminueix*. D'acord al que hem vist al capítol anterior, això es manifestarà amb la producció d'un treball mecànic, a través dels components F_X, que donarà origen a l'atracció del material en el sentit del camp magnètic *creixent*.



En el cas d'un material diamagnètic, els corrents electrònics i l'acció del camp magnètic s'invertiran, la secció electrònica tendirà a decréixer i *finalment*, també*, l'energia total del camp electromagnètic disminuirà*. Això causarà que el material es mogui en el sentit *decreixent* del camp.

La paradoxa de la comunicació d'energia mecànica a un material situat en el si d'un camp magnètic s'ha resolt fàcilment: *els materials paramagnètics i ferromagnètics es mouran en el sentit del camp magnètic creixent, mentre que en els materials diamagnètics passarà el contrari; això serà possible, gràcies a la disminució de l'energia global del camp electromagnètic.*

ELECCIÓ DEL GAUGE

Convé tenir en compte les definicions següents, emprades fins ara en part, en tot el que seguirà:

$$\frac{\partial u}{\partial x^{\alpha}} = \partial_{\alpha} u = u_{,\alpha} \qquad \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} = \partial^{\alpha} u = u'^{\alpha}$$

$$\Box = \Delta - \partial_0^2 = -\partial^{\alpha}\partial_{\alpha}$$

Sabem que el quadripotencial queda indeterminat. La transformació gauge vista anteriorment pot expressar-se tensorialment com

$$A'_\alpha = A_\alpha - \partial_\alpha f(x)$$

, amb *f(x)* funció arbitrària de les coordenades de *Minkowski*.

Aquesta transformació és massa general i s'acostuma a treballar amb gauges més senzills. Els gauges que comunament emprarem són aquests:

a) *Gauge de Lorentz*:

$$\partial^\alpha A_\alpha = A_\alpha^{,\alpha} = 0$$

b) *Gauge de Coulomb o de la radiació*:

$$A^0 = 0 \text{ i } div\, \vec{A} = 0$$

Com ja hem comentat, la utilització de gauges concrets facilitarà extraordinàriament tots els nostres càlculs.

EL CAMP ELECTROSTÀTIC

El camp elèctric constant s'anomena *camp electrostàtic.* Les seves equacions de *Maxwell* són

$$div\, \vec{E} = 4\pi\mu \quad rot\, \vec{E} = 0$$

Sabent que $\vec{E} = -\nabla\Phi$, resulten immediatament l'equació de *Poisson*

$$\Delta\Phi = -4\pi\mu$$

i l'equació de *Laplace* (si $\mu = 0$)

$$\Delta\Phi = 0$$

Aplicant les equacions de *Maxwell* i el teorema de *Gauss* al camp amb simetria esfèrica creat per una càrrega puntual, obtenim fàcilment els valors del camp i del potencial:

$$E = \frac{e}{r^2} \qquad \Phi = \frac{e}{r}$$

, on *r* és la distància del punt a la càrrega elèctrica.

Pel *principi de superposició* hom arriba ràpidament als valors dels camps i dels potencials elèctrics creats per un sistema de càrregues puntuals o per una distribució contínua de càrrega. La força de *Coulomb* entre dues càrregues és, finalment,

$$F = \frac{e_1 . e_2}{r^2}$$

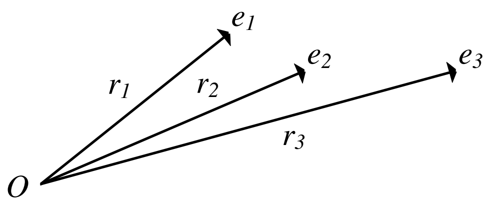
Podem veure la profunda semblança entre tot l'anterior i les equacions gravitatòries newtonianes

$$\Delta\Phi = 4\pi\rho G \quad \Phi = -G\frac{m}{r} \qquad F = G.\frac{m_1 . m_2}{r^2}$$

No estudiarem en profunditat el camp electromagnètic, ja que no és l'objectiu d'aquest llibre. Veurem només les conclusions referents a *les ones electromagnètiques, l'òptica geomètrica i els camps amb variabilitat temporal,* que utilitzarem més endavant.

Abans, però, donarem unes nocions elementals sobre els moments polars i magnètics per als qui vulguin aprofundir-les.

MOMENTS POLARS I MAGNÈTIC



Definim el *moment dipolar* del sistema de càrregues elèctriques de la figura anterior per l'expressió

$$\vec{d} = \sum_a e_a . \vec{r}_a$$

El moment dipolar depèn del punt *O,* excepte si la suma de càrregues elèctriques és nul·la.

El seu *moment quadripolar elèctric* D_{ij} es calcula mitjançant

$$D_{ij} = \sum_a e_a.(3.x_{ai}x_{aj} - r_a^2\delta_{ij})$$

Si substituïm e_a per la massa m_a i col·loquem l'origen O en el centre de masses del sistema, tenim el *moment quadripolar màssic*, d'aplicació en la relativitat general.

Anàlogament, obtenim el *moment magnètic* d'un sistema de càrregues amb velocitats $\vec{v}_a$:

$$\vec{m} = \frac{1}{2c}\sum_a e_a.\vec{r}_a x \vec{v}_a$$

Si totes les càrregues tenen la mateixa relació *e/m*, deduïm

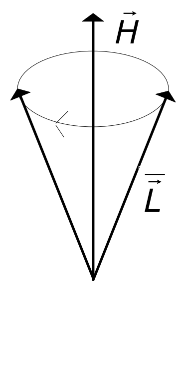
$$\vec{m} = \frac{e}{2mc}.\vec{L}$$

, on $\vec{L}$ és el moment angular total del sistema.

Considerem ara un sistema de càrregues que tinguin la mateixa relació *e/m.* Si aquest sistema està situat en un camp magnètic *H* exterior uniforme i constant, el valor mitjà de $\vec{L}$ verifica la relació

$$\frac{d\overline{\vec{L}}}{dt} = -\vec{\Omega}x\overline{\vec{L}} \text{ amb } \vec{\Omega} = \frac{e}{2mc}.\vec{H}$$

i, per tant, els valors mitjans del moment angular i, en conseqüència, del *moment magnètic* giren amb velocitat angular $-\vec{\Omega}$ entorn del sentit del camp, mentre que els seus mòduls i l'angle que formen amb aquell sentit es conserven constants (*precessió de Larmor*).



ONES ELECTROMAGNÈTIQUES

Anem a estudiar el camp electromagnètic al buit; això implica que $\mu = 0$ *i* $j = 0$, amb la qual cosa les equacions de *Maxwell* seran

$$rot\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad div\ \vec{H} = 0 \qquad rot\ \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad div\ \vec{E} = 0$$

Prescindint ara de l'origen del camp electromagnètic en el buit, les equacions anteriors sempre admeten solucions que no siguin nul·les. Això ens permet l'estudi *autònom* del camp electromagnètic en el buit sense parar esment en les càrregues causa del camp, que fins i tot podrien *no existir.*

Els camps electromagnètics en el buit en absència de les càrregues elèctriques s'anomenen *ones electromagnètiques.* Aquí els camps són forçosament variables, ja que els camps estàtics amb absència de càrregues són nuls.

Treballant amb el gauge de *Coulomb* o de la radiació farem

$$\Phi = 0 \qquad div\ \vec{A} = 0$$

D'aquí resulta *l'equació d'ones*

$$\Delta A^{\alpha} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^{\alpha}}{\partial t^2} = \Box A^{\alpha} = 0$$

L'operador $\Box = -\partial^{\alpha}\partial_{\alpha}$ és el *dalembertià* (sovint s'anomena així el valor *oposat*).

És fàcil comprovar que els camps elèctrics i magnètics satisfan la mateixa equació d'ones.

A continuació ens referirem a un cas particular de les ones electromagnètiques: el de les ones on els camps depenen només d'una coordenada espacial (*z,* per exemple) i del temps. Aquestes ones s'anomenen *ones planes.*

L'equació de les ones planes és

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

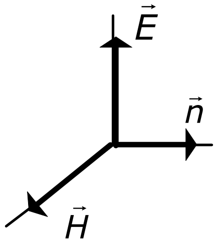
, on f representa qualssevol dels components del camp.

Podem afegir al gauge elegit la condició $A_z = 0$, ja que, altrament, hi hauria valors longitudinals dels camps aliens a l'ona. *Per tant, ens trobem únicament dos components independents del potencial vectorial*. Després d'un procés un xic llarg arribem a les conclusions que donem a continuació:

1-Les ones planes es propaguen en la direcció de z marcada pel vector unitari $\vec{n}$ amb velocitat c.

2-Entre els vectors $\vec{E}$, $\vec{H}$ i $\vec{n}$ es verifica la relació que es desprèn de la figura següent i que resulta ser

$$\vec{H} = \vec{n} x \vec{E}$$



3-El vector de *Poynting* val

$$\vec{S} = c.\boldsymbol{W}.\vec{n} \text{ amb } \boldsymbol{W} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2)$$

on $\boldsymbol{W}$ és la *densitat d'energia*. Si calculem l'expressió del seu tensor energia-impuls, hom veu que és equivalent a la que obtindríem per a un sistema material continu amb pressió

$$p = \frac{1}{3}.\rho.c^2 = \frac{1}{3}.\boldsymbol{W}$$

A partir d'aquell tensor energia-impuls, trobem la densitat d'impuls

$$\vec{P} = (\boldsymbol{W} / c).\vec{n}$$

Veiem, doncs, que la relació entre les densitats d'impuls i d'energia és equivalent a la que existeix en una partícula de velocitat c entre l'impuls i l'energia.

4-Una ona *monocromàtica* està *polaritzada.* Elegint de manera adequada els eixos, el vector camp, per exemple, verificarà

$$\frac{E_x^2}{a^2} + \frac{E_y^2}{b^2} = 1$$

En cada punt de l'espai el camp gira mentre el seu extrem descriu una el·lipse (*polarització el·líptica).* Si *a=b,* tenim la *polarització circular*. Si *a* o *b* són nuls, ocorre la *polarització lineal.*

La polarització el·líptica la podem obtenir com a superposició de dues polaritzacions lineals perpendiculars. Aquests dos graus de llibertat corresponen als dos components independents del quadripotencial.

Quan una ona polaritzada linealment incideix sobre un electró, aquest oscil·la i emet una altra ona polaritzada en la mateixa direcció al llarg essencialment d'un pla perpendicular. Amb la llum incident, polaritzada o no, podrem descompondre en cada instant el seu camp elèctric en les direccions de la nostra línia de visió i perpendicular a aquesta: només detectarem la part de l'emissió de l'electró corresponent a la darrera direcció i, per tant, ens arribarà una ona polaritzada linealment (*efecte Thomson*).

5-A partir de la *pulsació w* de l'ona, definim el quadrivector

$$k^{\alpha} = (\frac{w}{c}, \vec{k}) \text{ amb } \vec{k} = \frac{w}{c}.\vec{n} \text{ vector d' ona}$$

, que compleix $k^{\alpha}k_{\alpha} = 0$.

La freqüència *f*, el període *T* i la longitud d'ona λ verifiquen

$$f = \frac{w}{2\pi} \qquad T = \frac{1}{f} \qquad f.\lambda = c$$

$\vec{A}_k$ compleix (anàlogament a qualsevol magnitud periòdica)

$$\vec{A}_k = Re(\vec{A}_0.exp(i(\vec{k}.\vec{r} - wt))) = Re(\vec{A}_0.exp(-ik_{\alpha}x^{\alpha})) =$$

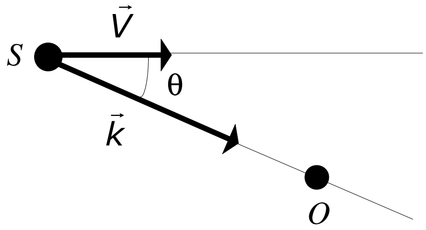
$$= \vec{a}_k.exp(i\vec{k}.\vec{r}) + \vec{a}_k^{*}.exp(-i\vec{k}.\vec{r}) \text{ amb } \vec{a}_k = \vec{a}.exp(-iwt)$$

i $\vec{A}_0$ *complex.*

Aquí es veu millor que k_{α} és un quadrivector perquè en fer la contracció amb el quadrivector x^{α} apareix la *fase* de l'ona, que té propietats escalars en ser una magnitud angular.

L'espectre electromagnètic en ordre creixent de freqüència és aquest: ones de ràdio->infraroig->visible->ultraviolat->raigs X ->raigs γ. El terme "espectre" el creà *Newton* en raó de l'aspecte fantasmagòric que tenia la descomposició prismàtica de la llum.

6-*L'efecte Doppler* apareix com a conseqüència de la llei de canvi del quadrivector k^{α} davant de les transformacions del grup de *Lorentz*.



$$\frac{w_s}{c^2} = \frac{\frac{w_0}{c^2} - \frac{V}{c^2}.\frac{w_0}{c}.\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

PROPAGACIÓ DELS RAIGS DE LLUM

D'acord amb el que s'ha vist, en una ona plana cada magnitud periòdica Ψ seguirà la llei

$$\Psi = Re(\Psi_0.exp(-ik_{\alpha}x^{\alpha}))$$

Si l'ona no és plana, podem fer la hipòtesi que en cada zona de l'espai ho sigui aproximadament, amb la qual cosa l'amplitud i la direcció de propagació (*raig)* seran lentament variables. L'estudi de les lleis de propagació dels raigs de llum és propi de l'*òptica geomètrica*.

Si l'energia de l'ona és gran ($\lambda \to o$), l'anterior serà possible i ella serà afectada molt a poc a poc.

Qualsevol magnitud s'escriurà ara així:

$$\Psi = Re(\Psi_0.exp(i\varphi))$$

Ψ_0 és una magnitud lentament variable de l'espai i del temps i φ és una expressió més complicada que abans anomenada *la iconal.*

Fent l'aproximació de *Taylor* de primer ordre

$$\varphi \approx \varphi_0 + \vec{r}.\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{r}} + t.\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

i comparant aquesta expressió amb la d'una ona plana, tindrem

$$\vec{k} = \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{r}} \qquad w = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} \qquad k^{\alpha} = -\varphi'^{\alpha} \qquad \varphi'^{\alpha}.\varphi_{,\alpha} = 0$$

La darrera expressió és *l'equació de la iconal*.

Podem ara relacionar les expressions anteriors amb els corresponent a l'acció d'una partícula altament energètica, amb la qual cosa podem prescindir dels valors comparativament petits de la seva massa *m* en repòs i del quadripotencial electromagnètic:

RAIG	PARTÍCULA
Equació de la iconal	Equació de *Hamilton-Jacobi*
$\varphi'^{\alpha}.\varphi_{,\alpha} = 0$	$S'^{\alpha}.S_{,\alpha} = 0$
$\vec{k} = \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{r}}$	$\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial\vec{r}}$
$w = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}$	$H = -\frac{\partial S}{\partial t}$

Podem identificar la trajectòria del raig amb el d'una partícula que es propagui a velocitat *c* introduint un factor de proporcionalitat que relacioni les magnituds corresponents.

A partir de la relació quàntica coneguda (vegeu el capítol 7)

$$E = h.f = \hbar.w \quad amb \quad \hbar = h / 2\pi$$

, obtenim

$$S = \hbar.\varphi \qquad \Psi = \Psi_0.exp(i.S / \hbar)$$

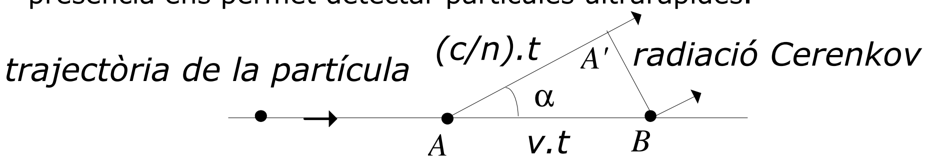
Aquestes expressions ens seran extraordinàriament útils en l'estudi de la física quàntica, mitjançant una generalització.

Com a exemples importants de la creació de raigs de llum tenim la reflexió, la refracció i la radiació *Cerenkov*. Sabem que l'aplicació del principi de *Huygens* permet l'explicació dels dos primers.[40] Anem ara a veure com es pot produir el tercer.

La velocitat c dels raigs de llum en el buit no es conserva en presència de matèria, en la qual la seva velocitat c' verifica $c'<c$. Pot ocórrer aleshores que una partícula tingui en un medi material una velocitat v més gran que la de la llum en el medi c'. Amb un índex de refracció $n>1$ la velocitat c' de la llum valdrà $c'=c/n$. Si la partícula té càrrega elèctrica, aquesta anirà polaritzant el medi al llarg del seu recorregut. Les variacions successives del moment dipolar generat al seu pas serà l'origen d'ones electromagnètiques. Es demostra que quan la partícula té una velocitat $v>c/n$ apareixerà una forta sinergia al llarg de la superfície cònica d'angle α que verifiqui

$$\cos\alpha = c\ /\ nv$$

Es tracta de la *radiació electromagnètica Cerenkov.* La seva presència ens permet detectar partícules ultraràpides.



A la figura superior es veu com es construeix el front d'ona a partir del raig que passa per A', procedent de A, i el que té l'origen en B després del pas d'un temps t en què la partícula s'ha desplaçat des de A a B.

EL CAMP CREAT PER CÀRREGUES EN MOVIMENT

En el que segueix comentarem de passada algunes de les propietats del camp electromagnètic creat per les càrregues elèctriques en moviment:

->Les equacions de *Maxwell* són equacions diferencials lineals. Les seves solucions s'obtindran sumant a la solució de les equacions homogènies ($\mu = 0 \quad \vec{j} = 0$) una solució *particular qualsevol.* Aquest potencial *particular* pot expressar-se com a suma de potencials *retardats i avançats.* La solució adoptada comunament ho és a base de potencials retardats, per tal de preservar la relació temporal entre causa i efecte, quan aquella és clara. Tanmateix, en paraules de *Wheeler* i *Feynman*, "en un sistema de càrregues interaccionant electromagnèticament entre si no és fàcil decidir les relacions de causa i d'efecte que hi ha i una teoria electromagnètica consistent hauria de poder considerar tant els potencials avançats com els retardats". En general, podem afirmar que *el potencial particular creat en un punt de l'espaitemps per un sistema de càrregues elèctriques que interaccionen electromagnèticament depèn dels punts de les trajectòries de les càrregues en instants anteriors o posteriors i separats del primer per intervals nuls corresponents a raigs de llum, mentre que el potencial corresponent a la solució del sistema homogeni tindrà una relació funcional amb el potencial exterior que actua sobre el conjunt de càrregues.*

->Els potencials retardats creats per una càrrega puntual adopten la forma corresponent als potencials de *Lienard-Wiechert*. D'aquí podem obtenir l'efecte de radiació electromagnètica creat per sistemes de càrregues accelerades. En particular, es comprova que, *per a una direcció, a grans distàncies de la font els camps en un punt són inversament proporcionals a la seva separació a aquella*, degut a l'efecte acumulatiu causat pel retard en la propagació de l'ona, i que la intensitat de la radiació depèn de les segones derivades temporals dels moments dipolar i magnètic i de la tercera derivada del moment quadripolar de totes les càrregues.

->La radiació electromagnètica que té el seu origen en l'acceleració d'una càrrega elèctrica, en general, i en l'acceleració centrípeta, en particular, s'anomena *radiació sincrotró* i és decreixent amb la massa de la partícula: en un accelerador el protó té menys pèrdues que un electró, però precisa d'imants més potents per variar la seva trajectòria.

->La radiació γ de curta durada que hom ha detectat a llargues distàncies cosmològiques és explicada per *Martin Rees* així:

a) Algun fenomen altament energètic (col·lisió d'estels, supernova, formació d'un forat negre,...) accelera fortament la matèria subtil pròxima (nebuloses difuses de formació d'estels, capes exteriors dels estels,...), que abasta velocitats properes a la de la llum i emet raigs γ.

b) Posteriorment aquella matèria es desaccelera pel contacte amb altra matèria, tot emetent nova radiació.

c) La separació amb què rebem les dues radiacions anteriors és petita degut a l'altíssima velocitat material i la radiació γ serà, doncs, de curta durada (*"Gamma-Ray-Bursts"=GRB*).

->Si fem l'estudi del moviment d'una càrrega elèctrica esfèrica de radi *R* sotmesa a l'acció *retardada* del seu propi camp i d'un camp exterior, arribem, en el límit *v<<c,* a les conclusions que exposem a continuació:

$$1\text{-}Força\ exterior + \frac{2.e.^2\,\ddot{v}}{3.c^3} - m_{em}.\dot{v} = m.\dot{v}$$

, on m_{em} és la massa *d'origen electromagnètic*

$$m_{em} = \frac{4}{3c^2}U_0 \quad U_0 = \frac{e^2}{R}$$

i *m* la massa d'origen no electromagnètic.

2-Definint la massa empírica $m_0 = m + m_{em}$, tenim

$$força\ exterior + força\ de\ reacció = m_0.\dot{v}$$

La segona de les dues forces, suma de les que actuen sobre cada element infinitesimal de la càrrega total esfèrica per l'acció de la resta, és la corresponent a l'amortiment degut a la reacció a la radiació i no és necessàriament nul·la, perquè el principi d'acció i reacció no és aplicable a causa que la velocitat de propagació de les interaccions és finita. En el cas d'una partícula que tingués acceleració constant aquesta força seria nul·la i el principi de conservació de l'energia implicaria la disminució energètica del camp creat per la càrrega, per compensar la pèrdua energètica deguda a la radiació que té l'origen en l'acceleració d'ella.

3-En absència d'un camp exterior, la força de reacció dóna lloc a solucions on la càrrega lliure és autoaccelerada (solucions "*run-away*").

4-La relativitat imposa que les partícules siguin puntuals; en efecte: un cos esfèric rígid no podria existir, perquè qualsevol interacció implicaria dins del cos la *propagació instantània real.* Tot això ens dóna unes masses electromagnètica i no electromagnètica infinites amb addició igual a la massa empírica. La presència de les divergències és la causa de l’autoacceleració esmentada.

5-*Feynman* i *Wheeler* empraren *potencials retardats i avançats*, tot introduint "subtilment" la fletxa electromagnètica del temps, de manera que les ones retardades es reforçaven i les avançades interferien destructivament. Així s'evitaren les solucions "*run-away*" i es foragitaren la presència del terme corresponent a la massa electromagnètica i els problemes de les divergències i de les addicions de masses, amb l'aparició únicament de la massa empírica a les equacions del moviment.

6-Tot l'anterior representa un suport a la *mecànica relativista predictiva (MRP).* En aquesta, l'estat d'una partícula depèn dels punts de l'espaitemps de les altres partícules, sense més consideracions que les d'invariància relativista de les equacions del moviment (*covariància*). En cap cas s'ha tenir en compte la temporització deguda al valor finit de *c* (perquè *no hi ha res que es propagui* en la interacció), ni tampoc cal una descripció amb la simultaneïtat temporal dels diferents punts espaciotemporals on es troben les distintes partícules. La no-existència d'una regressió infinita cap al passat a través d'infinits intervals nuls entre les partícules, que permeten la propagació de la interacció mútua, elimina la dificultat de tenir un sistema tancat d'equacions.

El formulisme de la *MRP* suggereix que cada trajectòria és influïda per totes les altres, *en el seu conjunt.* Apareix, doncs, una unitat (com ja vàrem avençar al capítol 1) que se'ns farà palesa a la física quàntica i a les teories no locals, però que aquí ja s'intueix.

UNA DARRERA REFLEXIÓ

Malgrat les seves insuficiències, la teoria de l'electromagnetisme clàssic restarà per sempre com a una de les obres més belles del pensament creatiu humà. Veurem més endavant que la teoria de l'electromagnetisme, *amb una nova interpretació,* resultarà molt fructífera dins de la teoria quàntica de camps.

L'anterior apareix sovint al llarg de la història de la ciència. Cada passa conté un bri de versemblança i a base de *tempteigs* ens anem apropant per aproximacions successives a teories cada vegada més elaborades.