RELATIVITAT GENERAL 6

INTRODUCCIÓ

A part de la termodinàmica, les dues teories fonamentals desenvolupades prèviament a la relativitat eren aquestes:

a) La mecànica i la gravitació newtonianes.

b) L'electromagnetisme maxwellià.

La gravitació i la mecànica newtonianes són invariants per les transformacions de *Galileu*, però no per les de *Lorentz*.

A les equacions de *Maxwell*, curiosament, ocorre una invariància relativista, malgrat haver estat formulades amb força anterioritat a la relativitat. D'alguna manera les equacions de *Maxwell* anunciaven la relativitat i en donar una mateixa velocitat *c* per a la propagació de les ones electromagnètiques en qualsevol sistema inercial foragitaven la hipòtesi de l'èter.

El canvi de la mecànica newtoniana per la relativista l'hem explicat ja a bastament, quant a la generalització de la llei fonamental $\vec{F} = m.\vec{a}$ per a sistemes inercials.

Anem ara a comentar els altres dos principis newtonians:

a) *El principi d'acció i reacció*.

b) *El principi d'inèrcia*.

El principi d'acció i reacció aplicat, per exemple, a la interacció electromagnètica entre dues càrregues elèctriques s'esmuny com un foc d'encenalls. Des de la teoria de l'electromagnetisme, i raonant sobre la força de *Lorentz* induïda pels potencials retardats que cada càrrega crea al si de l'altra, resulta que les forces de

Lorentz que actuen *al mateix instant* sobre càrregues que no estiguin en contacte són diferents.

Quant al principi d'inèrcia, ens endinsem en un raonament cíclic:

1-Si sobre un cos no actua cap força, en un sistema inercial la seva acceleració és nul·la.

2-Com sabem, però, que no actua cap força? Perquè el sistema és inercial i l'acceleració del cos és nul·la.

No cal insistir gaire per adonar-nos que no arribem enlloc.

Mach trenca un xic el cercle viciós:

Si el nostre sistema no té acceleració respecte de les estrelles fixes, comprovem el principi d'inèrcia i la llei $\vec{F} = m.\vec{a}$. *Aquest sistema seria, doncs, inercial. Així, entendríem per sistema inercial aquell que es mou amb velocitat relativa constant en relació a una massa mitjana de l'univers.*

Si el sistema, però, està accelerat en relació a un d'inercial, la conclusió anterior canvia així:

a) Un cos no sotmès a cap força es mou amb una acceleració que és *independent* de la seva massa.

b) *Forces exteriors + forces d'inèrcia* $= m.\vec{a}$.

La primera conclusió ens porta a veure la similitud que hi ha entre l'anterior i l'acceleració d'un cos sotmès a la llei de la gravitació de *Newton*, on es comprova experimentalment el mateix.

Anomenant m_i la *massa inercial* i m_g *la massa gravitacional*, tenim que

$$F = G.\frac{M_g.m_g}{d^2} = m_i.a$$

i, si l'acceleració no depèn del cos, arribem a la conclusió $m_g=k.m_i$ que, a través d'un sistema adient d'unitats, esdevé *l'equivalència de les masses inercial i gravitatòria* (*principi d'equivalència*). El principi d'equivalència pot tenir la traducció següent: *A l'entorn d'un punt els efectes d'un camp gravitatori es poden considerar equivalents als que observem en absència de gravetat en un sistema accelerat respecte dels estels fixos amb acceleració oposada a la del cos arbitrari.* Més endavant aclarirem més tot això.

Quant a la segona conclusió, ens fem la pregunta següent: Són reals les forces d'inèrcia en el mateix sentit que les de la gravetat, que tenen el seu origen en la matèria, tot sabent que les "forces d'inèrcia" introduïdes al *principi de d'Alembert* són un pur artifici matemàtic sense cap significat físic quan treballem en un sistema inercial? El principi machià portat a les darreres conseqüències diria que sí. El seu raonament seguia aquest camí:

Un cos no sotmès a cap força es mourà amb velocitat constant respecte de la massa mitjana de l'univers. En un sistema inercial la massa global de l'univers no està accelerada i un cos lliure es mourà amb velocitat constant. En un sistema no inercial la massa mitjana de l'univers està accelerada; no podria ésser aquesta acceleració la causa de les forces d'inèrcia que actuen sobre el cos? *Mach* ho afirma. Això darrer constitueix el *principi de Mach. Mach* no podia justificar-lo en el seu temps; veurem més endavant que la *relativitat general* ho fa només en part.

Ens resta finalment comentar les limitacions de la gravitació newtoniana:

1-Ella no és invariant relativista.

2-*L'equació de Poisson* $\Delta\Phi = 4\pi\rho G$ hauria de canviar-se; efectivament: si l'energia és equivalent a la massa, l'equació de *Poisson* hauria de reflectir aquest fet i, a més, el caràcter tensorial amb què l'energia es relaciona (recordem la interpretació del tensor energia-impuls). L'equació de *Poisson* hauria d'esdevenir tensorial.

3-Si la llum posseeix energia, ella hauria d'ésser desviada pel camp gravitatori.

4-Si la gravitació és universal, el principi d'inèrcia és inaplicable en no poder anul·lar la força que actua sobre un cos.

Tot l'anterior, conjuntament amb el principi d'equivalència, conduí *Einstein* a la seva teoria de la gravitació.

LA TEORIA DE LA RELATIVITAT GENERAL

A continuació exposarem les característiques generals de *la més bella de les teories físiques* existents.

LOCALMENT un camp gravitatori té els mateixos efectes que els que hom veuria des d'un sistema no inercial accelerat en absència del camp i amb acceleració oposada a l'acceleració d'un cos deguda al camp gravitatori. Amb l'anterior hem eliminat el camp. L'equivalència no es pot estendre a tots els punts de l'espai, perquè el camp ja és nul a "l'infinit" FÍSICAMENT sense necessitat de l'eliminació anterior. Aquest principi s'anomena d'equivalència feble.

El principi d'equivalència es recolza en el fet que tots els cossos tenen la mateixa acceleració en el si del camp gravitatori. Això darrer no ocorre amb altres camps, com l'electromagnètic, on l'acceleració depèn de la massa del cos.

Podem definir ara un sistema inercial local com aquell en què les lleis locals de la física són iguals a les que tenim en els sistemes en què es compleix el principi d'inèrcia i no estan sotmesos a l'acció de la gravetat (principi d'equivalència forta). Aquest sistema inercial local ignora la força gravitatòria, es mou amb velocitat relativa constant en relació a cossos no sotmesos a altres forces que la gravitatòria i no seria inercial en el sentit convencional on consideraríem la presència gravitatòria com a origen d'una força.

Comparem això amb les propietats dels espais de *Riemann*.

GRAVITACIÓ	***ESPAI DE RIEMANN***
Camp gravitatori.	*Mètrica riemanniana.*
Sistema S no inercial equivalent localment al camp gravitatori.	*Mètrica euclidiana osculatriu al punt en coordenades curvilínies.*
Sistema S' inercial local.	*Mètrica euclidiana osculatriu al punt en coordenades rectilínies.*
Canvi de coordenades entre S i S'.	*Canvi de coordenades curvilínies a rectilínies.*
No es pot trobar una anul·lació total del camp gravitatori.	*No es pot trobar una única mètrica euclidiana osculatriu en tots els punts.*

Seguim ara en síntesi el raonament genial que féu *Einstein*:

1-En absència de gravetat tenim un espai euclidià. La mètrica d'aquest espai és la de *Minkowski* en sistemes inercials. La mètrica s'haurà d'expressar en coordenades curvilínies en sistemes no inercials sense perdre, però, el caràcter pla o euclidià.

2-En presència de gravitació tenim un espai riemannià i podem definir un espai euclidià que sigui localment osculatriu a ell. L'espai euclidià expressat en coordenades curvilínies ens representarà la descripció de fenòmens *localment* equivalents en un sistema no inercial en absència de la gravetat. Aquest sistema tindria una acceleració oposada a la dels cossos deguda al camp gravitatori. L'espai euclidià expressat en coordenades rectilínies ens descriurà els fenòmens des d'un sistema inercial que es mouria amb l'acceleració dels cossos en presència del camp i en el qual els cossos no sotmesos a altra força que la gravitatòria tindrien *localment* velocitat constant: es tracta de la ingravitació.

3-Amb un canvi de coordenades curvilínies a rectilínies de la mètrica euclidiana osculatriu, es comprova que l'anterior equival que amb la mètrica gravitatòria

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dy^{\alpha} dy^{\beta}$$

puguem realitzar un canvi de coordenades que faci que la nova mètrica en un punt concret verifiqui

$$(g_{\alpha\beta})_P = \eta_{\alpha\beta} \qquad (g_{\alpha\beta,\gamma})_P = 0$$

, on $\eta_{\alpha\beta}$ és la mètrica de *Minkowski.*

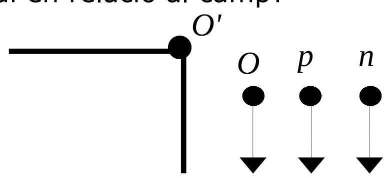
4-La gravitació és causada per un canvi de la mètrica i *ella serà únicament un efecte aparent degut a la curvatura de l'espaitemps que es detecta en comparar les geodèsiques properes*.

5-La trajectòria d'un cos sotmès *només* a l'acció de la gravetat serà una *geodèsica* localment equivalent a una recta de l'espai euclidià osculatriu. En conseqüència, entre totes les trajectòries que uneixin dos punts concrets de l'espai de *Riemann*, la geodèsica posseirà el valor màxim de l'interval espaciotemporal i, per tant, del temps propi. Les altes velocitats i els camps gravitatoris intensos (vegeu "El desplaçament al vermell") disminueixen aquest temps propi. Quan només es dóna un d'aquests aspectes, el resultat final dependrà dels valors concrets en cada cas.

Així, en el problema dels bessons la disminució del temps propi del bessó en repòs vora el potent camp gravitatori d'un forat negre podria quedar compensat per l'efecte relativista de l'alta velocitat del bessó viatger: no hi hauria paradoxa! En canvi, si dues persones se separen caminant lentament sobre la superfície de la Terra, quan es retrobin haurà envellit més la qui s’hagi desplaçat a més gran altura a través dels cims d’una muntanya: l’efecte relativista de la velocitat serà negligible i l’efecte gravitacional serà més important.

Podrem identificar localment la mètrica riemanniana amb l'euclidiana osculatriu i d'aquí obtenir els conceptes que necessitem. La distinció entre ambdues mètriques és cabdal, perquè la naturalesa *és* en un nivell inabastable i *existeix* fenomenològicament *en el món local.* L'espai de *Riemann* representa l'univers tal com *és* i la seva *manifestació* es realitza a l'espai euclidià localment equivalent de la nostra experiència. Anàlogament, el significat de les coordenades riemannianes rau que amb la seva projecció local podem parlar de l'espai i del temps convencionals.

A continuació veurem un exemple que ens permetrà comentar les implicacions del principi d'equivalència. Suposem un camp gravitatori fictici constant i uniforme i que en el seu si es mouen dues partícules, una *p* amb càrrega elèctrica i l'altra *n* sense. Què veuran un observador *O* que caigui amb elles i un observador *O'* que no es mogui en relació al camp?

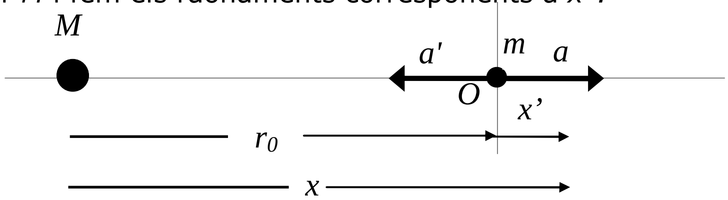


Pel principi d'equivalència *O* veurà que les dues partícules romanen en repòs i que la rodalia d'ambdues és idèntica. L'observador *O'* haurà de veure, per tant, el mateix moviment per a les dues partícules. Tanmateix, la partícula *p* està accelerada en relació a *O'* i haurà de radiar. Ha estat violat el principi de conservació de l'energia, com a conseqüència de l'anterior? No detectarà O radiació? On rau la fal·làcia del raonament?

L'observador *O* no és inercial, sinó únicament localment inercial; cap radiació apareixerà a les rodalies i, per tant, la radiació detectada per *O'* ho serà lluny de les partícules. *O* podrà detectar radiació lluny d'ell, perquè més enllà el principi d'equivalència, que impedia la radiació, no es compleix. Resta, però, la violació del principi de conservació de l'energia; d'on surt l'energia de la radiació? Apareixerà per la disminució de l'energia del camp electromagnètic més enllà de la partícula carregada. *Aquí veiem la importància de la distinció entre equivalència local i global.*

LES EQUACIONS DEL CAMP GRAVITATORI (I)

Sigui una massa *m* sotmesa a l'acció del camp gravitatori creat per *M* i fem els raonaments corresponents a x^{+}.



La massa *m* estarà sotmesa a l'acceleració *a'* i es verificarà

$$G\frac{M.m}{r_0^2} = m.|a'| \quad \Phi = -\frac{G.M}{x} \quad \Phi \cong \Phi_O + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_O .x' = \Phi_O - a'.x' \; ; \; -a'.x' = \Phi - \Phi_O$$

El moviment de *m* serà equivalent localment al que observem des del sistema no inercial d'acceleració a = -a'. Substituint a l'aproximació newtoniana de la mètrica euclidiana en coordenades curvilínies del capítol 2 el valor de $a.x' = \Phi - \Phi_O$ tenim que

$$ds^2 = (1 + \frac{2.(\Phi - \Phi_O)}{c^2}).c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

Això ens *suggereix* aquesta mètrica gravitatòria *per a tot l'espai*, on a l'infinit amb $\Phi = 0$ tenim el límit euclidià:

$$ds^2 = (1 + \frac{2\Phi}{c^2}).c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Podem arribar al mateix resultat a partir del valor de *L*

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\Phi$$

en el límit amb v->0. Trobant l'acció i fent que coincideixi amb

$$-mc\int ds$$

, on *ds* és l'interval corresponent a la mètrica riemanniana *teòrica,* obtenim

$$ds = (c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\Phi}{c}).dt$$

Si elevem al quadrat aquesta expressió i partim de la definició de *v* amb l'aproximació *c>>0,* trobem el mateix d'abans.

Amb aquesta mètrica gravitatòria podem raonar així:

1-Obtenim el tensor d'*Einstein*, que verifica

$$G^{\alpha\beta}_{;\alpha} = 0$$

2-Amb l'aproximació *v<<c* i *p=0* calculem el tensor energia-impuls de matèria vist al capítol 5, que verifica també

$$T^{\alpha\beta}_{;\alpha} = 0$$

3-L'anterior ens suggereix que ambdós tensors són proporcionals. Fent les substitucions corresponents i identificant l'expressió final amb l'equació de *Poisson* i les geodèsiques amb les trajectòries, obtenim la constant de proporcionalitat entre tots dos tensors i les *equacions del camp gravitatori:*

$$G^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}.T^{\alpha\beta}$$

La part de l'esquerra (la part *maca*, segons *Einstein*) és la part geomètrica, on figuren les derivades dels coeficients de la mètrica. La part de la dreta (la part *lletja*, segons el mateix *Einstein)* ens descriu la matèria o l'energia que crea el camp.

Els deu coeficients diferents de la mètrica són els *potencials gravitatoris* i intervenen a les equacions de les geodèsiques per mitjà dels símbols de *Christoffel*.

El tensor energia-impuls depèn de la matèria, dels camps, en general, i del propi camp gravitatori a través dels coeficients de la mètrica. Això darrer era evident, perquè el camp té energia i, per l'equivalència massa-energia, actua com a font de gravitació. Per tant, el camp en cada punt intervé en la creació del camp en els punts contigus i finalment és l'efecte *local* de la curvatura, i no l'acció a distància, el que mou gravitacionalment els cossos.[17]

La teoria de la relativitat general introdueix, a través del tensor energia-impuls, un canvi altament significatiu en relació a la física newtoniana. La pressió del medi actua gravitacionalment: atractivament, si és positiva, i repulsivament, si és negativa. Així, el col·lapse gravitatori és possible degut que els creixements de la gravitació i de la pressió es reforcen mútuament i contínua, mentre no hi hagi una causa, com la fusió nuclear a l'interior dels estels, que l'aturi.

Les equacions del camp gravitatori són equacions diferencials no lineals en dos sentits molt diferents:

a) Elles són estrictament no lineals (fins i tot amb el tensor energia-impuls nul) i una combinació lineal de solucions no n'és una solució, altrament al que ocorre en l'electromagnetisme.

b) El tensor mètric també està contingut al tensor energia-impuls i, en conseqüència, actua sobre el camp (*feed-back).*

Tot l'anterior ens demostra la *dificultat* de resoldre, en general, les equacions del camp. Més endavant en veurem les solucions en certs casos senzills i de gran interès: el camp gravitacional amb simetria esfèrica i la cosmologia.

Les transformacions de coordenades que conserven la forma de les equacions i que són completament generals amb la geometria global gravitatòria (*covariància*) es limiten al grup de transformacions de *Lorentz-Poincaré* amb la geometria minkowskiana (*invariància*). La forma tan especial de la mètrica minkowskiana fa que les transformacions que la conserven siguin inevitablement més restringides que les corresponents a una mètrica riemanniana on els seus coeficients no tenen el caràcter absolut que posseeixen en aquella (no hi ha observadors privilegiats en relativitat general). És el mateix que passa entre la física de *Newton* i la relativitat: la presència del temps absolut fa que les transformacions de *Galileu* siguin més restringides que les de *Lorentz-Poincaré*. Per claredat, podríem distingir entre covariància general i covariància limitada (o invariància): es tracta de transformacions *passives*.

La relativitat general és també invariant davant de transformacions *actives difeomòrfiques* del propi espai (vegeu l'apèndix 1). Això i la pròpia dinàmica de la geometria espaciotemporal fan que la relativitat general sigui "*background independent*".

La relativitat general és una teoria local: res no ens diu de la *forma* i topologia globals de l'univers, per exemple, i hauríem de definir-lo axiomàticament com a una varietat topològica *E* quadridimensional adient. A més, no ens seria possible visualitzar la seva forma des de dins d'ell... caldria sortir fora de l'univers!

La connexió entre la geometria i la física es podria fer a través de la proporcionalitat del tensor energia-impuls amb un cert tensor geomètric. Sota determinades condicions el *teorema de Riemann* afirma que, per tal d'assegurar l'existència i unicitat de solucions en un cert subconjunt de *E* a partir de les dades inicials sobre una hipersuperfície tridimensional on els punts estiguin connectats per intervals espacials (*superfície espacial*), aquell tensor geomètric resulta ser el d'*Einstein*. Això ens indica la bondat del que hem anat fent fins ara.

La hipersuperfície *S* anterior s'anomena *acronal,* si cap punt d'ella precedeix temporalment a cap altre (*t*=constant). En aquest cas, podem definir el domini futur $D^+(S)$ i el domini passat $D^-(S)$ determinats per les dades a *S,* a partir de corbes temporals que enllacin els diferents punts d'ells amb els de *S.*

Quan $D^+(S)USUD^-(S)=E$ tenim una *superfície de Cauchy.* Les dades en una superfície de *Cauchy* ens permeten conèixer les de *tot* l'espai. Un espai *E* no té obligatòriament una superfície de *Cauchy*, però, si en té, en té infinites per a cada *t*=constant.

L'axiomàtica elegida seria compatible amb molts universos:

->L'univers de *Gödel,* els forats negres amb rotació i la presència dels *forats de cuc* admeten línies temporals tancades. Si es pogués viatjar en el temps apareixerien moltes paradoxes: algú podria matar el seu pare, que l'engendraria més tard!

->Amb un forat de cuc ("*wormhole*", terme introduït per *Wheeler*) tenim ara una estructura espaciotemporal que permetria la connexió entre universos diferents (potser a través d'un forat negre?) o entre punts d'un univers molt allunyats en l'espai "normal" en un temps molt petit (seria l'equivalent d'anar a les nostres antípodes a través del diàmetre terrestre que ens uneix). Per tal que el forat de cuc no es destruís ràpidament, a causa de la gravetat, i el viatge a través d'ell fos possible caldria introduir-li energia negativa que actuaria antigravitacionalment (vegeu el capítol 8). Una civilització avançada podria aprofitar els teòrics forats de cuc primordials de l'origen de l'univers o reproduir-hi les condicions adients per crear-los. Suposem ara que una boca A del forat de cuc romangués a la Terra i es conduís l'altra B a la vora d'un estels de neutrons. El temps a B transcorreria més lentament que a A (vegeu "El desplaçament al vermell" en aquest mateix capítol) i després de la sincronització inicial entre A i B s'aniria acumulant una diferència temporal entre elles a través de l'espai "normal"**[11]**. Si travesséssim el forat de cuc i tornéssim ràpidament a la Terra podríem arribar-hi abans d'haver sortit, amb l'única limitació que ho faríem després de la construcció del forat de cuc. La presència, però, de línies temporals tancades podria crear un efecte energètic acumulatiu que destruiria el forat de cuc.

Amb línies temporals tancades no hi hauria orientació temporal global, malgrat que localment això fos possible. Amb la interpretació dels *molts móns* de la física quàntica les paradoxes desapareixerien: podríem sortir d'un món i arribar a un altre!

->La connexió entre la mètrica i la noció de paral·lelisme és molt oberta. Les teories d'*Einstein-Cartan* són una alternativa possible, que no considerarem en el que segueix. Nosaltres continuarem admetent únicament la connexió riemanniana.

->L'univers no és necessàriament homogeni i isòtrop (vegeu més endavant "La màxima simetria" en aquest mateix capítol). Si volem que ho sigui, caldrà imposar-hi les condicions adients.

->La presència o no de singularitats, en què les geodèsiques s'interrompen temporalment, no n'és una característica general i caldrà també fixar-hi les condicions per permetre-les o no.

Acabem amb unes reflexions generals sobre la curvatura:

1-El tensor de *Riemann-Christoffel* ens dóna les propietats euclidianes o no de l'espai.

2-El tensor de *Ricci* i la curvatura riemanniana figuren a les equacions del camp a través del tensor d'*Einstein*.

3-Dins de l'estudi de la *cosmologia* veurem que hi figura la *curvatura k*. Aquesta curvatura, tanmateix, és la corresponent a la subvarietat espaciotemporal amb t = *constant* i és diferent de la curvatura riemanniana R (això s'aclarirà al lloc corresponent).

CONCEPTES MÈTRICS

En un espai euclidià distingíem entre les coordenades rectilínies i les curvilínies. En un espai riemannià l'anterior no té sentit i anomenarem x^{α}, en general, les coordenades espaciotemporals d'un punt (*coordenades globals).*

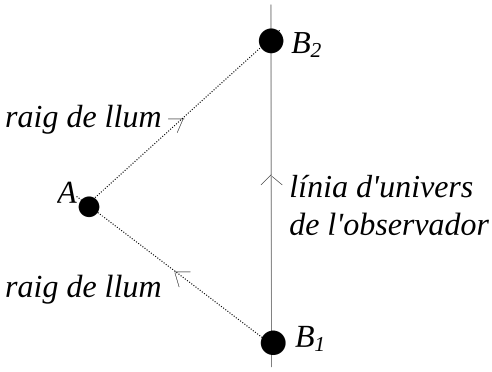
Suposem ara que tenim un observador que segueix una línia d'univers a l'espai de *Riemann*. Quin serà el temps propi entre un parell d'esdeveniments, si hem elegit un sistema de coordenades globals on $(dx^i)_{observador} = 0$? Tenim fàcilment que

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = g_{00} (dx^0)^2$$

D'aquí, per integració, obtenim finalment

$$\tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{00}} \, . \, dx^0$$

Suposem ara els esdeveniments A, B_1 i B_2 connectats per intervals lluminosos, d'acord amb la figura següent. A partir d'ella anem a *definir* l'element de *longitud dl.*



Suposant que les coordenades globals x^i de l'observador no variïn, podem relacionar el temps propi $d\tau$ amb la variació dx^0 de la coordenada x^0 de l'observador entre els esdeveniments B_1 i B_2, tal com hem fet abans:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = g_{00} (dx^0)^2$$

Definim la longitud entre A i B_1 o B_2 com

$$dl = \frac{c}{2} . d\tau$$

D'aquí, connectant B_1-A i A-B_2 per intervals nuls, obtenim

$$dl^2 = (-g_{ij} + \frac{g_{0i} \cdot g_{0j}}{g_{00}}) . dx^i dx^j = l_{ij} dx^i dx^j$$

Hem definit, doncs, dl en funció únicament dels elements de les coordenades *espacials* i hem trobat la relació entre la mètrica representativa de l'espai tridimensional l_{ij} i la mètrica $g_{\alpha\beta}$ de l'espai quadridimensional de *Riemann*.

Convé adonar-nos que la mètrica l_{ij} depèn del temps a través de la dependència del tensor mètric de la coordenada x^0. Per això, la integració de dl serà funció de la línia d'univers que seguim, malgrat que passem per les mateixes coordenades x^i, en general. Només si el tensor mètric no depèn de x^0, la integral de dl tindrà un sentit unívoc en relació a les coordenades espacials.

Un camp s'anomena *constant,* si el tensor mètric no depèn de x^0*.* Si un camp és constant i, a més, $g_{0i}=0$*,* els dos sentits del temps són equivalents i direm que el camp és *estàtic.* Si no es compleix la segona condició, com al camp constant creat per un cos en rotació, direm que el camp és *estacionari.*

Anem ara a *definir* la *simultaneïtat* entre esdeveniments. A partir de la figura anterior, direm que és simultani amb A l'esdeveniment de la línia d'univers entre B_1 i B_2 tal que la seva coordenada x^0 sigui la mitjana entre els valors corresponents de B_1 i B_2. Segons això, la diferència dx^0 entre punts *simultanis* ve donada per

$$dx^0 = -\frac{g_{0i}dx^i}{g_{00}}$$

A partir d'aquesta expressió podem *sincronitzar* rellotges al llarg d'una corba entre dos punts. L'increment total Δx^0, però, pot dependre del camí elegit; només si els $g_{0i}=0$ (sempre es pot tenir un sistema de coordenades amb aquesta condició), podem realitzar una sincronització perfecta. Si no podem obtenir una total sincronització, sovint arribem a resultats paradoxals; en efecte: si dos esdeveniments C_1 i C_2 ocorren en un mateix punt de l'espai i són simultanis respectivament als D_1 i D_2 que ocorren en un altre punt, pot succeir que els intervals de temps propi entre C_1-C_2 i D_1-D_2 siguin diferents. Per a la sincronització de rellotges atòmics i en els sistemes de posició global (GPS) cal tenir en compte les correccions de la relativitat general.

Si les $g_{0i}=0$ i $g_{00}=1$*,* la sincronització serà possible i la x^0/c coincidirà amb el temps propi en cada punt; aquest sistema de coordenades s'anomena *síncron.*

Les definicions de longitud i de simultaneïtat obtingudes per extrapolació de la nostra experiència ens porten a resultats que aparentment són paradoxals. Si les apliquem fora de l'àmbit en què foren concebudes, la paradoxa aparent s'esvaeix quan n'acceptem les conseqüències i adoptem una nova manera de pensar.

Podem ara entendre millor les paraules d'Einstein quan afirma que les coordenades globals no tenen significat mètric a priori: aquest ve a posteriori mitjançant *definicions* a partir de la nostra experiència immediata. Aquestes definicions donen lloc a aparents paradoxes nascudes del nostre deler per estendre el que sabem a altres àrees que no els pertoca.

Recollint tot el que hem dit, podem afirmar:

1-Les coordenades globals serveixen a priori per *marcar* els punts de l'espai tetradimensional. *Només* a posteriori elles ens ajuden a conèixer els aspectes mètrics a partir de *definicions*.

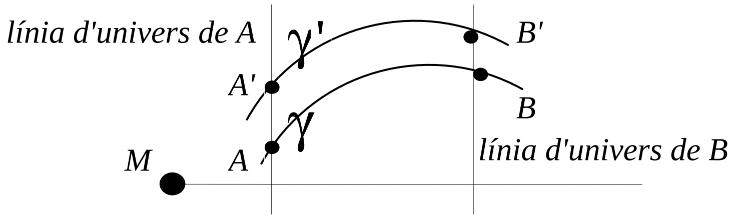
2-El concepte de sistema de referència canvia radicalment en relativitat general degut que els valors mètrics s'han definit localment. Caldran infinits observadors omplint l'espai amb rellotges sincronitzats. Així, la trajectòria d'un cos anirà passant pels diferents punts d'observació i a partir del coneixement de la mètrica local coneixerem les propietats del seu moviment. Podem tenir sistemes de referència *fonamentals* quan els observadors estiguin situats en llocs de l'univers amb una velocitat mitjana del seu entorn igual a la d'ells *o* amb valors coincidents de les mitjanes locals de la temperatura del fons de microones *o* de la densitat de l'univers *o* de la curvatura exterior. *No tenim, però, observadors ni sistemes de sincronització privilegiats en relativitat general!*

3-Si el temps propi, la sincronització i la longitud s'han definit localment a partir de *c*, és evident que la velocitat de la llum definida a partir de temps i longituds locals continuarà essent *c. Hem partit del patró c per definir els conceptes mètrics.* En paraules d'*Einstein*, no són els observables els que figuren en la teoria, sinó que és aquesta la que ens diu el que podem observar! *Milne* demostrà, semblantment, que la relativitat es pot derivar del fet de definir les distàncies en termes de mesures temporals.

4-Quant a l'estructura espacial, què és el que hi ha més enllà de l'espai corb? Dins de la concepció relativista no hi ha res més; o millor dit: *no ens cal pas res més*. No podria, tanmateix, haver-hi connexions, no necessàriament espaciotemporals, entre els diferents punts de l'espaitemps? La presència de la curvatura *k* cosmològica obre una porta a aquesta possibilitat. El mateix cal dir a partir de la no-localitat i de la compactació de les dimensions addicionals a la teoria de les supercordes que veurem més endavant. *Res, però, pot afirmar-se ni negar-se a hores d'ara*.

EL DESPLAÇAMENT CAP AL VERMELL

Tenim un senyal lluminós que es desplaça, en el si del camp creat per la massa *M,* des d'un punt *A* de l'espai a un altre *B*.



A la figura hem dibuixat les línies d'univers de dues crestes successives de l'ona que són geodèsiques que verifiquen $ds^2=0$.

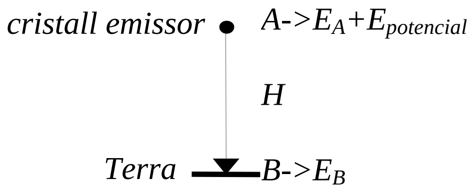
Amb la hipòtesi de camp estàtic es demostra que, si tenim una corba geodèsica lluminosa γ i una altra γ' que verifiquin $(dx^i)_A=0$, també es complirà $(dx^i)_B=0$ i, a més, $(dx^0)_A=(dx^0)_B$.

Sabent les relacions entre dx^0 i $d\tau$ i entre el període i la longitud d'ona i coneixent els valors de g_{00} i Φ, trobem la raó que hi ha entre les longituds d'ona a *A* i a *B:*

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2GM}{r_A c^2}}{1 - \frac{2GM}{r_B c^2}}}$$

Per tant, deduïm que la longitud d'ona augmenta en allunyar-se la llum de la massa *M* i anar en sentit contrari al camp (*desplaçament cap al vermell*). Això és el que ocorre amb les línies espectrals d'origen solar.

Altrament, si la llum procedeix d'un punt proper a la Terra, ella es desplaçarà cap al blau segons la mateixa relació, en viatjar a favor del camp terrestre.



Amb l'aproximació $H<<R_{terra}$ resulta

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} \cong 1 + \frac{gH}{c^2}$$

, on $g=GM/R^2_{Terra}$ és l'acceleració de la gravetat.
A partir de la interpretació quàntica, que més endavant veurem, $E=h.\nu=m.c^2$, tenim finalment

$$E_B \cong E_A + mgH$$

En aquest cas, la relació anterior ens dóna un significat energètic al desplaçament cap al blau. L'efecte pot comprovar-se experimentalment, perquè les freqüències teòriques són mesurades *finament* gràcies a l'efecte *Mossbauer.* Amb l'emissió d'un fotó pel cristall, el fotó interacciona amb *tot el cristall* i no únicament amb l'àtom emissor (*efecte Mossbauer*); si no fos així, el retrocés de l'àtom canviaria l'impuls i la freqüència del fotó.

El temps propi de la línia d'univers AA'B' és més petit que el que el de la ABB', ja que els temps propis de les trajectòries lluminoses són nuls: *el temps transcorrerà més lentament en presència de camps gravitatoris intensos*.

LES EQUACIONS DEL CAMP (II)

Anem a continuació a indicar el camí per deduir les equacions del camp gravitatori pel principi d'acció extrema.

L'acció total del sistema que contingui la gravitació amb una constant cosmològica Λ, la matèria i l'electromagnetisme serà

$$\underbrace{k\int (R/2+\Lambda)\sqrt{|g|}\,d^4x}_{(I)} - \underbrace{\sum_a m_a c\int ds}_{(II)} -$$

$$-\underbrace{\sum_a \frac{e_a}{c}\int A^{\alpha}dx_{\alpha}}_{(III)} - \underbrace{\frac{1}{16\pi}\int F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\sqrt{|g|}\,d^4x}_{(IV)}$$

(I) serà l'acció del camp gravitatori; *(II), (III)* i *(IV)* són les accions conegudes per nosaltres. Ara aplicarem el principi d'acció extrema variant les coordenades *generalitzades* següents:

1-*Coordenades de les partícules*->emprarem *(II)+(III)* i obtindrem finalment:

$$m_a c\left(\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds}\right) = \frac{e_a}{c} F^\alpha_\beta \frac{dx^\beta}{ds}$$

, que és la generalització de l'expressió obtinguda al capítol anterior. Si no tenim camp electromagnètic, resulta que la trajectòria de la partícula és una *geodèsica* de l'espai de *Riemann*.

Amb la relació

$$F_{\alpha\beta} = A_{\beta;\alpha} - A_{\alpha;\beta}$$

obtenim el primer grup de les equacions de *Maxwell*

$$F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} = 0$$

2-*El camp electromagnètic*->emprarem *(III)* i *(IV)* i deduirem el segon grup d'equacions de *Maxwell*:

$$F^{\alpha\beta}_{;\beta} = \frac{4\pi}{c}.s^\alpha$$

3-*Els potencials gravitatoris*->emprarem *(I)*, *(II)* i *(IV)*. Fent les identificacions en el límit newtonià que hem vist abans, arribem finalment a l'equació d'*Einstein*:

$$G^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}.T^{\alpha\beta}$$

La *constant cosmològica* λ només intervé en problemes molt específics de cosmologia i en l'aproximació newtoniana val zero.[4] $T^{\alpha\beta}$ és el tensor energia-impuls *conjunt* de la matèria i del camp electromagnètic.

EL QUASITENSOR ENERGIA-IMPULS

El tensor energia-impuls verifica

$$T^{\alpha\beta}_{;\alpha} = 0$$

, que, en general, no implica cap llei de conservació, perquè $T^{\alpha\beta}$ no inclou la "part" corresponent al camp gravitatori.

A partir del camp gravitatori es pot construir de forma no senzilla $t^{\alpha\beta}$ (*el quasitensor energia-impuls*) , que no és pas un tensor, però que, sumat a $T^{\alpha\beta}$, permet trobar lleis conservatives, perquè

$$(|g|.(T^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta}))_{,\beta} = 0$$

Mitjançant l'aplicació dels teoremes d'integració a la varietat riemanniana, trobem *per a tot l'espai* la *conservació de l'energia-impuls i del moment cinètic*:

$$P^{\alpha} = \frac{1}{c}\int |g|(T^{\alpha o} + t^{\alpha o})dV$$

$$M^{\alpha\beta} = \int x^{\alpha}dP^{\beta} - x^{\beta}dP^{\alpha}$$

Als comentaris fets al capítol 4 sobre la resta de components del tensor $T^{\alpha\beta}$ i la possible presència de radiació gravitacional quan V és finit, hi afegirem els que segueixen:

a) En gravitació podem tenir energia local, malgrat l'anul·lació del tensor energia-impuls i del tensor d'*Einstein* en aquell punt. El caràcter no tensorial de t^{ik}, però, fa que la seva anul·lació en un punt no sigui invariant. Per tant, en un sistema el buit pot contenir energia i en un altre no. *L'energia no està localitzada i està assignada a tot l'espai en el seu conjunt*. Segons *Penrose*, això podria obrir un camí d'unió cap a la física quàntica no local.

b) Per altra banda, l'*energia associada al camp gravitatori és negativa*, la qual cosa permetria la "creació" d'un univers amb una vida llarga a partir d'una fluctuació del buit (vegeu "la incertesa de l'energia" al capítol 7).

ONES GRAVITATÒRIES

Amb $T^{\alpha\beta} = 0$ podem fer l'estudi d'un camp gravitatori *feble al buit,* que podrà superposar-se linealment a un camp gravitatori preexistent, tot considerant una aproximació de primer ordre de la mètrica gravitatòria al voltant de la mètrica de *Minkowski*:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad amb\ |h_{\alpha\beta}| << 1$$

Els $h_{\alpha\beta}$ *verifiquen l'equació d'ones amb una velocitat de propagació c.* Si l' ona és plana, amb un gauge adient tots els $h_{\alpha\beta}$ són nuls, excepte, potser, $h_{12}=h_{21}$ i $h_{22}=-h_{11}$: l'ona serà *transversal*.

Realitzant les integracions de l'apartat anterior en *un volum espacial finit*, podem trobar la radiació gravitatòria corresponent. Es demostra que fonamentalment la derivada temporal tercera del *moment quadripolar* d'un conjunt de masses (vegeu el capítol 5) dóna lloc a la radiació d'ones gravitatòries (la conservació de l'esfericitat d'un cos durant el col·lapse no crearia ones gravitatòries). Les dimensions dels cossos seran afectades pel camp de l'ona gravitatòria, que a grans distàncies és inversament proporcional a la seva separació a la font per a una direcció determinada. Contràriament a les ones electromagnètiques, la radiació gravitatòria no és màxima sobre un pla perpendicular a la direcció d'oscil·lació de dues masses, sinó sobre una superfície cònica.

Un cos circular llunyà situat en un pla perpendicular a la direcció de propagació de l'*ona transversal* es transformaria en una el·lipse situada al mateix pla. Aquesta el·lipse polsaria al voltant del cercle original i giraria d'acord amb la freqüència de l'ona gravitatòria. Si $h_{12}=h_{21}=0$ o $h_{22}=-h_{11}=0$ l'el·lipse no giraria. Les direccions d'oscil·lació en els dos casos anteriors formen un angle de 45º, altrament al que ocorre amb les ones electromagnètiques, on les dues direccions bàsiques d'oscil·lació són perpendiculars.

La detecció indirecta de les ones gravitatòries ha estat possible a partir del canvi de la freqüència de les pulsacions d'un púlsar binari[36] degut a la variació de l'energia comuna de rotació causada per la radiació gravitatòria. La detecció directa de les ones gravitacionals no s'ha obtingut a hores d'ara i podria fer-se palesa per les variacions que elles causarien en les dimensions d'un cos.

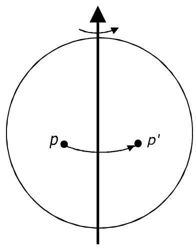
Davant d'una rotació de 180º els components de $h_{\alpha\beta}$ no varien (a les ones electromagnètiques cal una rotació de 360º per obtenir la invariància dels potencials). Degut a això*, i com veurem als capítols de física quàntica*, les partícules associades a les ones gravitatòries i electromagnètiques seran aquestes:

1-El *gravitó,* que apareix a partir de la quantificació d'una ona gravitatòria amb espín=2.

2-El *fotó,* que sorgeix com a conseqüència de la quantificació d'una ona electromagnètica amb espín=1.

SIMETRIES A L'ESPAITEMPS

Suposem el conjunt de punts de l'esfera de la figura que segueix. Si realitzem una rotació, cada punt *P* es transforma en un altre *P'.* Si la rotació és infinitesimal, cada punt estarà sotmès a un desplaçament infinitesimal que serà funció de les coordenades, tot romanent el conjunt de l'esfera globalment invariable.



Anem ara a raonar de forma semblant amb la varietat V_4.

Realitzem un desplaçament infinitesimal des del punt $P(x^{\alpha})$ al punt $P'(x^{\alpha}+\xi^{\alpha}(x^{\alpha}))$, on el desplaçament ξ^{α} depèn de les coordenades de cada punt i és un camp vectorial infinitesimal.

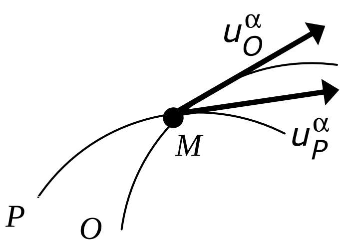
Si el tensor mètric verifica en tota la varietat V_4 la relació

$$(g_{\alpha\beta})_P = (g_{\alpha\beta})_{P'}$$

, direm que l' espai té una simetria amb vector de *Killing* $\xi^{\alpha}(x^{\alpha})$.

Si l'espai té el vector de Killing ξ^{α} *i* u^{α} *és el vector unitari tangent a una geodèsica, es demostra que la quantitat* $\xi^{\alpha}.u_{\alpha}$ *es conserva constant al llarg d'una geodèsica.*

Sigui ara un observador *O* i una partícula *P* amb línies d'univers que es troben al punt *M*.



L'energia de la partícula P per a l'observador O serà

$$E = mc^2 u^{\alpha}_{O} u_{P\alpha}$$

, perquè a l'espai pla osculatriu es verifica

$$u_O^\alpha = (1,0,0,0) \quad p^\alpha = (\frac{E}{c}, \vec{p}) \quad u_{P\alpha} = \frac{1}{mc}(\frac{E}{c}, -\vec{p})$$

i la relació anterior és vàlida, per la qual cosa la generalització de l'expressió de l'energia a un espai de *Riemann* és correcta degut a la seva escriptura tensorial.

El que s'ha vist al llarg d'aquest apartat sobre les propietats del vector de *Killing* i la definició d'energia en un espai de *Riemann* tindrà la seva aplicació a l'estudi dels *forats negres.*

MÀXIMA SIMETRIA

Segons la mètrica, la seva simetria serà més o menys forta i s'admetran també més o menys vectors de *Killing* amb una independència funcional

Es demostra que, si $dim(V_n)=n$, el nombre màxim de vectors de *Killing* amb una independència funcional és C_n^2. Aquest nombre és més gran que n per a $n>3$, la qual cosa és possible perquè els vectors esmentats són funcions.

La màxima simetria possible apareix quan la curvatura R és constant. El signe de R es conserva amb les transformacions de coordenades, per mitjà de les quals podem obtenir els valors de la curvatura $+C$, 0, $-C$ que vulguem. La màxima simetria esdevé als espais que són *homogenis i isòtrops.* Un espai és *homogeni*, si no té punts privilegiats i des de cada punt l'espai es veu igual que des de tots els altres. Un espai és *localment isòtrop* en P, si des de P l'espai es veu igual en totes direccions. Un espai és *isòtrop*, si és localment isòtrop en tots els seus punts i des d'ells es veu de la mateixa manera en totes direccions.

Es demostra que tot espai isòtrop és homogeni.

Sigui un conjunt de subespais V'_m de V_n tals que es verifiqui:

1-Les coordenades $x^1,...,x^m$ defineixen els diferents punts de cada subespai, mentre que $x^{m+1},...,x^n$ són constants en cada subespai i la seva variació ens va *marcant* els distints subespais.

2-Cada subespai té la màxima simetria amb C_m^2 vectors de *Killing* amb una independència funcional.

D'acord amb l'anterior es demostra que la mètrica de V_n val

$$ds^2 = f(x^{m+1},\dots,x^n).\sum_{\alpha,\beta\leq m} g_{\alpha\beta}(x^1,\dots,x^m)dx^\alpha dx^\beta + $$
$$+\sum_{\alpha,\beta>m} h_{\alpha\beta}(x^{m+1},\dots,x^n)dx^\alpha dx^\beta$$

Vegem ara dos casos particulars d'aquesta mètrica i que emprarem a les nostres aplicacions.

a) *Mètrica amb simetria esfèrica.*

Els subespais de V_4 de màxima simetria són varietats (<u>esferes</u>*)* de dimensió 2 (el subratllat és essencial ja que les coordenades no tenen a priori el significat habitual, com sabem, i la interpretació mètrica ve a posteriori). Es demostra que

$$ds^2 = h_{oo}dt^2 + 2h_{rt}drdt + h_{rr}dr^2 + f(r,t)(d\theta^2 + sin^2\theta d\Phi^2)$$

Els h_{00}, h_{rt} i h_{rr} són funcions només de r i t i la interpretació de les coordenades t, r, θ,Φ és evident al límit *euclidià estàtic* en què *es transformaria* la mètrica en coordenades esfèriques:

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\Phi^2))$$

Aplicarem aquesta mètrica a l'estudi *del camp gravitatori creat per una massa esfèrica.*

b) *Espaitemps cosmològic.*

Els subespais de V_4 de màxima simetria són de dimensió 3 (cada subespai és <u>l'espai tridimensional</u> a cada *instant;* el subratllat és també essencial) i la mètrica resulta ser

$$ds^2 = h_{00}dt^2 - S^2(t)(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\Phi^2))$$

El coeficient h_{00} depèn només de t i $k= +1, 0, -1$, segons que el valor de la curvatura riemanniana de *l'espai tridimensional* sigui positiva, nul·la o negativa. La interpretació al límit euclidià estàtic *seria* la mateixa de l'apartat a) anterior.

Aquesta mètrica serà utilitzada a *cosmologia.* La màxima simetria de l'espai tridimensional equival que compleixi les propietats d'*homogeneïtat i isotropia.*

LA SIMETRIA ESFÈRICA

A partir de la forma de la mètrica que acabem de veure, corresponent a la simetria esfèrica, seguirem les passes que a continuació donem sense, però, aprofundir-ne els detalls:

1-Podem calcular successivament els símbols de *Christoffel* i el tensor d'*Einstein* $G^{\alpha\beta}$ i d'aquí trobar la relació entre els seus components i els del tensor energia-impuls $T^{\alpha\beta}$ a partir de les equacions del camp gravitatori. Amb la hipòtesi de $T^{\alpha\beta} = 0$ per a $r \geq R$ resulta que *es pot* descriure l'espaitemps a l'exterior de $r=R$ per una mètrica estàtica, fins i tot si l'objecte col·lapsa o s'expandeix esfèricament (*teorema de Birkhoff).* Definint

$$M = \int_0^R \frac{4\pi}{c^2} r^2 T_0^0 dr$$

, amb el límit d'espai pla quan $r \to \infty$, arribem a la *mètrica de Schwarzschild*

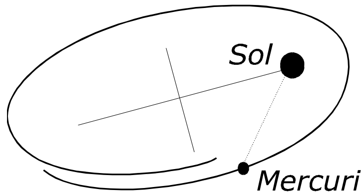
$$ds^2 = (1 - \frac{2GM}{rc^2})c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} - r^2(\sin^2\theta d\Phi^2 + d\theta^2)$$

2-Coneguda la mètrica exterior a $r=R$, és una qüestió purament tècnica, mitjançant un desenvolupament matemàtic més o menys laboriós, arribar a les conclusions següents:

a) *Desplaçament al vermell* quan la llum viatja en sentit contrari al camp gravitatori. Aquesta qüestió ha estat tractada abans amb detall.

b) L'estudi de les geodèsiques ens permetrà calcular *les òrbites planetàries.*

L'anterior ens donarà a conèixer la *precessió* de *Mercuri* deguda, fonamentalment, a la velocitat més gran d'ell al periheli com a conseqüència de l'efecte relativista causat pel camp gravitatori. Això ho podem visualitzar a la figura següent:



c) *Deflexió de la llum* per acció de la gravetat, obtinguda a partir de les geodèsiques amb $ds^2 = 0$. La desviació de la llum procedent dels estels, diferent de la que es preveu en la mecànica newtoniana amb *la hipòtesi no newtoniana afegida* d'una massa gravitacional del fotó igual a $h\nu/c^2$, fou comprovada parcialment per *Eddington* durant un eclipsi solar.

3- En el límit quan $r \to \infty$ apareix l'expressió de la força convencional $F \propto 1/r^2 + \alpha\Lambda r$. Quan la constant cosmològica s'anul·la, tenim l'aproximació newtoniana, on la constant M es pot interpretar com a la *massa gravitatòria del cos que crea el camp* (fins ara no li havíem donat cap significat precís).

4-Els elements diferencials del temps propi i de la longitud es troben fàcilment a través de les propietats mètriques de l'espai:

D'aquí podem afirmar el que segueix:

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}\,dt \qquad dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} + r^2(\sin^2\theta\, d\Phi^2 + d\theta^2)$$

a) En general $d\tau < dt$ i ambdós diferencials són equivalents a grans distàncies de la massa M.

La quantitat

$$\alpha = \frac{2GM}{r.c^2}$$

pot tenir tres valors:

- $\alpha < 1$: la coordenada t té les característiques pròpies d'una coordenada *temporal.*
- $\alpha = 1$: tenim una *singularitat* que correspondrà al *radi de Schwarzschild* r_s. Calculant la velocitat d'escapament newtoniana

$$\frac{1}{2}mv^2 = G\frac{Mm}{r}$$

corresponent a $r = r_s$, aquella resulta ser *c.*

* $\alpha > 1$: La coordenada *t* no pot considerar-se *temporal*. Aquest problema no és intrínsec, sinó fruit *només* del sistema de coordenades que hem elegit. Fent el canvi entre *(r,t)->(u,v),* on *u* i *v* són les coordenades de *Kruskal-Szekeres,* resolem el problema anterior; cal, però, pagar un preu: la mètrica esdevé *no estàtica.* Per aquesta raó a r_s l'anomenem *límit estàtic* de la mètrica. També es pot comprovar que el temps propi en creuar $r=r_s$ esdevé finit. Es pot descriure tot l'espaitemps per a $r>0$ i roman únicament la singularitat a $r=0$.

b) Si calculem *l'expressió de dl,* comprovem que l'espai tridimensional no és euclidià, perquè la *longitud radial* corresponent a *r* amb Φ *i* θ constants és major que *r*, mentre que *la longitud de la seva circumferència* amb $\Phi =$ *constant i* $\theta \in [0,2\pi]$ val $2\pi.r.$

5-Si $r < r_s$, res no pot escapar més enllà de r_s. Això ho veuríem estudiant les geodèsiques tot fent el canvi de coordenades que hem dit a 4). Amb la nova coordenada *temporal* creixent trobaríem que *r* sempre disminueix: $r < r_s$ ens dóna un moviment *unidireccional* cap endins (*forat negre*). Els *límits estàtic i unidireccional* coincideixen en aquest cas. Per als estels normals $r_s < R$ i el valor del radi de *Schwarzschild* no té conseqüències pràctiques. Només a partir del *col·lapse gravitatori* en què $R < r_s$, tot el que acabem de dir cobra una importància real.

6-La llum emesa des de les rodalies de $r = r_s$ la veurem infinitament desplaçada cap al vermell ja que allí g_{00} val quasi zero. La longitud d'ona infinita a la recepció implica que no rebrem la informació emesa per algú abans de caure al forat negre.

7-La massa *M* de *Schwarzschild* és diferent de la massa *m* del cos que crea el camp gravitacional. Si calculem el quadrivector energia-impuls *conjunt* del camp i de la matèria que el crea, comprovem que la contribució energètica gravitatòria del quasitensor energia-impuls és negativa. Finalment, es verifica que

$$M.c^2 = m.c^2 + \textit{energia del camp}$$

i *la massa M de la mètrica de Schwarzchild ens dóna l'energia total del sistema camp-matèria*.

Aparentment, la quantitat $M.c^2$ deduïda a partir de l'expressió que hem trobat abans, a través de la interpretació de T^{00} com a densitat energètica *material,* només ens donaria l'energia de la matèria. La fal·làcia del raonament rau que $4\pi.r^2.dr$ és més petit que el volum mètric elemental, perquè l'espai no és euclidià i *dr* no és la longitud radial.

D'aquí deduïm que la massa *m* del cos és més gran que la massa gravitacional efectiva *M que crea el camp.* Cal no confondre's amb la igualtat entre la massa inercial *m* i la massa gravitacional *sotmesa a l'acció del camp* i que intervé a l'aproximació newtoniana.

Què vol dir, però, que l'energia del camp és negativa? Si separéssim fins a l'infinit les partícules materials corresponents a *m fins anul·lar el camp gravitacional*, caldria subministrar al sistema total una energia per vèncer l'atracció gravitatòria. Si l'energia de les partícules romangués constant, aquella energia positiva subministrada al *sistema total* compensaria exactament l'energia del camp que hauria de ser negativa.[28]

8-A partir del desenvolupament teòric dels forats negres de *Schwarzchild*, es trobà una solució espectacular de les equacions de la relativitat general. Es tractava del *pont d'Einstein-Rosen,* que posteriorment es rebatejà amb el nom de *forat de cuc*.

EL COL·LAPSE GRAVITATORI

El que hem estudiat a l'apartat anterior correspon als punts de l'espai on $T^{\alpha\beta} = 0$ i, segons el teorema de *Birkhoff*, la mètrica en aquesta part de l'espai pot tenir una estructura estàtica amb unes coordenades adients, *prescindint de l'estat estàtic de la massa que crea el camp*, com abans hem dit.

El que ara farem és l'estudi a l'interior de *M,* suposant que el seu estat sigui *estàtic.*

Utilitzarem l'expressió coneguda del tensor energia-impuls de la *matèria*

$$T^{\alpha\beta} = (P + \rho.c^2)U^{\alpha}U^{\beta} - P.g^{\alpha\beta}$$

A partir de les equacions gravitacionals d'*Einstein*, de les propietats de $T^{\alpha\beta}$ i $G^{\alpha\beta}$ i suposant l'estat *estàtic* a què hem fet esment, arribem a la troballa de l'equació diferencial

$$\frac{dp}{dr} = f(p, r, \rho, m(r))$$

, amb $m(r)$ descrita per l'expressió

$$m(r) = \int_0^r \frac{4\pi}{c^2} r^2 T_0^0 dr$$

Per obtenir la pressió en funció de *r,* caldrà afegir una equació d'estat que relacioni la pressió *p* amb la densitat ρ. Si la densitat és *constant*, arribem finalment a trobar la pressió en cada punt de l'interior de *M* en funció de *r,* ρ i *M,* amb la condició que per a *r = R* la pressió valgui zero:

$$P = P(r, \rho, M)$$

A l'expressió de *p* comprovem que per a determinat valor crític de *M/R* $p(0) \to \infty$. Mitjançant les equacions d'*Einstein* podem conèixer la mètrica interior de *M* i així trobar la massa *m* corresponent a *M/R, a partir de la densitat i de les propietats mètriques espacials.* D'aquí arribem a esbrinar el valor crític m_c de *m*, per al qual $p(0) \to \infty$ i *el col·lapse és inevitable.*

Masses més grans que m_c poden evitar el col·lapse gràcies a les reaccions nuclears que subministren la pressió addicional de la radiació, *que no havíem inclòs al tensor energia-impuls anterior*.

Els estels amb masses més petites que m_c podrien col·lapsar després de consumir el seu combustible nuclear degut al refredament que farà disminuir la pressió, deguda al moviment tèrmic, que *teòricament era necessària per a l'equilibri.* En el que segueix representarem per $M_\odot$ la massa del Sol.

Si un estel té una massa més petita que el *límit de Chandrasekhar,* $m \cong 1.4 M_\odot$, el col·lapse s'evitarà degut a la repulsió que apareix entre els electrons alliberats dels àtoms a causa de les altes pressions en contraure's l'estel (en apropar-se els àtoms, els electrons no pertanyen a cap àtom en concret i es mouen lliurement com als metalls). Aleshores, diem que tenim una matèria *degenerada.* Aquella repulsió és un efecte quàntic degut al *principi d'exclusió de Pauli* per a aquests electrons lliures. Els electrons ocuparan nivells energètics creixents (vegeu l'apartat sobre "la partícula lliure" de les aplicacions de l'equació de Schrödinger del capítol 7). Els electrons més energètics subministraran la pressió addicional per equilibrar l'atracció gravitatòria. Al límit de *Chandrasekhar* tenim un estel *nan blanc*; la seva radiació és causada per la gran temperatura i ell s'anirà refredant fins convertir-se en un *nan negre.* Per cert, quan un periodista va comentar a *Eddington* que només tres persones entenien la teoria de la relativitat general i ell contestà... quina és la tercera?... *Eddington* ignorà, voluntàriament o no, *Chandrasekhar*.

Més enllà del límit anterior, el principi d'exclusió de *Pauli* entre els neutrons (les elevades pressions i temperatures causen la conversió de protons i electrons conjuntament en neutrons) evitarà encara el col·lapse final, si la massa no supera *el límit d'Oppenheimer-Volkoff* (amb un valor al voltant de $3M_{\odot}$) i tindrem un *estel de neutrons.* Si ultrapassem aquest llindar, el col·lapse arriba fins a les darreres conseqüències i la creació d'un *forat negre* (el terme fou creat per *Wheeler*) és inevitable.

FORATS NEGRES

Resumint el que ja hem dit sobre els forats negres, podem afirmar que:

a) Res no pot escapar de dins del límit de *Schwarzschild*, la llum no pot sortir-ne i per això veiem el sistema *com un forat negre.* L'*horitzó* marca aquest límit del moviment *unidireccional*.

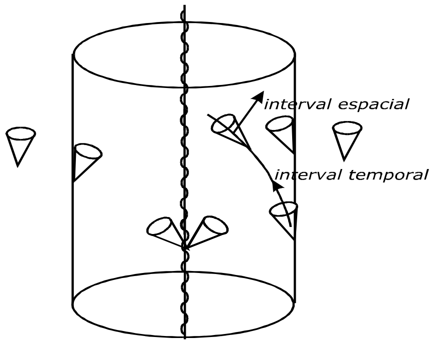
b) La llum procedent de la frontera del forat negre està infinitament desplaçada cap al vermell i, per tant, la *informació* continguda a l'ona no ens arribarà mai des d'aquest *límit.*

c) El radi de *Schwarzschild* marca el *límit estàtic,* més enllà del qual la coordenada *t* perd el seu caràcter temporal quan les coordenades espacials no varien; o dit d'una altra manera: l'interval corresponent al vector de *Killing finit (1,0,0,0)* perd el seu caràcter temporal i no pot representar un observador real (que l'esmentat vector és de *Killing* es dedueix del fet que la mètrica és constant).

d) Els tres límits a), b) i c) coincideixen per al forat negre *amb simetria màxima* que hem estat estudiant fins ara.

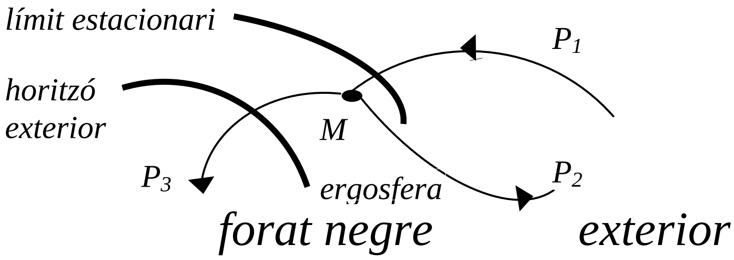
e) La rotació d'un estel al voltant d'una parella desconeguda i la radiació de la matèria atreta pel forat hipotètic ens permeten deduir la seva existència.

Amb la figura que segueix (*només* hi figuren les coordenades *x, y, t)* podem comentar algunes de les propietats ans esmentades.



A la figura hi ha dibuixats uns quants *cons de llum*. Veiem que als punts de l'eix central conflueixen infinits cons de llum i, per tant, apareix una *singularitat* de la mètrica. En paraules de *Penrose*, aquesta singularitat està amagada, censurada per als observadors externs, perquè Déu detesta les singularitats nues... El moviment unidireccional apareix per la necessitat dels intervals temporals per a sistemes físics, com es veu fàcilment a la figura.

La mètrica de *Kerr no té la màxima simetria:* és la mètrica que representa el camp creat per una massa en rotació i, per tant, no és una mètrica estàtica, sinó estacionària (vegeu l'apartat sobre els *conceptes mètrics*), perquè l'interval no és invariant per inversió temporal. Aquí tenim la presència de dos horitzons dins del límit estàtic (ara s'anomenarà més pròpiament *estacionari*): l'*exterior* (coincident amb el que hem vist abans) i l'*interior* (amb desplaçament infinit cap al vermell de la informació externa). Més enllà de l'horitzó interior podem trobar línies temporals tancades. L'horitzó exterior no coincideix amb el límit estacionari, l'espai entre ambdós s'anomena *ergosfera* i els cossos que hi penetren són forçats a girar en el sentit de rotació del forat. Per a un valor concret del moment angular del forat els dos horitzons coincideixen. Per a valors superiors els dos horitzons desapareixen i tenim una singularitat nua. L'ergosfera permet *el procés de Penrose,* que visualitzem a la figura següent:



Tenim una partícula que penetra dins de l'ergosfera i que es desintegra al punt *M* en altres dues; una d'elles penetra dins de l'horitzó i l'altra surt a l'exterior, més enllà del límit estacionari.

Al punt *M* un *observador O* amb quadrivelocitat proporcional a *(1,0,0,0) és fictici i no real* ja que el seu interval propi no és temporal sinó espacial. Podem, però, elegir un observador *real* a *M* que comprovi el principi de conservació de l'energia i fer la transformació corresponent a l'observador *fictici* que trobarà que es verifica el mateix principi, degut a l'escriptura tensorial de l'energia

$$E = mc^2 u_O^{\alpha} u_{P\alpha}$$

, on U_O i U_P són els vectors unitaris tangents a les geodèsiques de l'observador i de la partícula respectivament.

Com que $U_O = (1,0,0,0)$ és un vector de *Killing*, els valors de les energies al llarg de les *geodèsiques* corresponents de les partícules conservaran els seus valors (vegeu l'apartat sobre *simetries a l'espaitemps*) i, per tant, es verificarà

$$E_{P_1} = E_{P_2} + E_{P_3}$$

Els valors de les energies als punts P_1 i P_2, en situar-nos fora del límit estacionari seran positives. L'energia corresponent al punt P_3, en canvi, en situar-se la geodèsica dins de límit estacionari pot esdevenir negativa. Per tant, l'energia de la partícula sortint pot ser més gran que la de la partícula entrant (*efecte Penrose*). En el cas particular que no entri cap partícula, tindrem la *radiació de Penrose* possibilitada per l'existència de l'ergosfera.

El gir d'un cos esfèric es comunica a la geometria espaciotemporal exterior. Aquest efecte es detectaria amb la precessió, en relació al fons dels estels fixos, de l'eix d'un giroscopi en rotació sobre la Terra, precessió inexistent si aquesta no rotés.

En el cas més general, en física clàssica l'estat *intern* d'un forat negre ve determinat per la massa *M,* el moment angular total

L i la càrrega elèctrica total *Q.* El sistema es pot estudiar a partir del tensor energia-impuls corresponent a la matèria i al camp electromagnètic. Finalment hom arriba a conèixer la dependència funcional entre l'àrea *A que delimita el forat (o, simplement, la seva àrea)* i els valors de *M, L* i Q :

$$M = M(A, L, Q)$$

D'aquí es troba la relació que hi ha entre les *variacions* de les quantitats anteriors:

$$\delta M = a\delta A + l\delta L + q\delta Q$$

El fet que en una descripció clàssica *res* no pugui sortir del forat, conjuntament amb la relació variacional anterior, ens porta a comprovar que $\delta A \geq 0$ i, en conseqüència, que l'àrea del forat no pot disminuir. Això ens permet *relacionar directament l'entropia del forat negre amb la seva àrea.* La fórmula de *Bekenstein-Hawking*, finalment, ens dóna la relació ans esmentada*:* $S=k.A/4$, on *A* és la superfície del forat negre expressada en unitats de *Planck* (una unitat de *Planck* val aproximadament $10^{-66}cm^2$ i *k* és la constant de *Boltzmann*). En processos on intervinguin distints forats negres l'aplicació de *la segona llei de la termodinàmica* ens diu que la suma de les seves àrees no disminueix mai.

La identificació de *M* amb l'energia interna del forat ens permet dir que la relació variacional anterior és l'expressió de la *primera llei de la termodinàmica,* amb la qual cosa podem interpretar els termes amb $\delta L, \delta Q$ com a treballs mecànics i el terme que contingui δA com el $T\delta S$ corresponent a l'entropia *S* i la temperatura *T* del forat negre.

Quan penetra la matèria dins d'un forat negre, la quantificació de la seva massa implica la de la superfície de l'horitzó i, en definitiva, la quantificació de l'espai.

Podríem obtenir energia útil a partir dels forats negres?

a) La introducció de matèria a prop de la superfície d'un forat negre formant un *disc d'acreció* permetria la conversió de l'energia gravitatòria fins a un valor teòric màxim corresponent al de la seva massa en repòs, molt superior al que n'obtindríem per fusió nuclear, a partir de la radiació tèrmica originada per les elevades temperatures que les fortes pressions provocarien.

b) La disminució de l'energia de rotació d'un forat negre, a través de la introducció a l’ergosfera de matèria en la direcció adient, permetria un guany energètic gràcies a l’efecte *Penrose*.

c) La fusió de dos forats negres amb càrregues elèctriques de signe oposat donaria lloc a una minva de l'energia elèctrica total que podríem utilitzar adequadament.

A partir de la fórmula de *Bekenstein-Hawking* i de l’expressió que lliga l'àrea A del forat amb la seva massa M obtenim, per al cas en què L i Q siguin nuls, les relacions

$$S = k_s . M^2 \quad T = k_t \ / \ M$$

La paradoxa que aquí apareix és que, si podem assignar una temperatura al forat negre, aquest haurà de radiar; la radiació de *Hawking* permet donar una resposta a l'anterior qüestió.

Per altra banda, si el forat radia, la seva massa disminuirà (conjuntament amb l'entropia i l'àrea) amb la qual cosa la temperatura augmentarà i el ritme de la radiació creixerà cada vegada més i més. La disminució de l'entropia del forat quedarà compensat pel seu augment corresponent a la radiació i el segon principi de la termodinàmica no serà violat. La radiació de *Hawking* només és important en forats de massa petita, com els forats negres primordials que podien haver aparegut en els primers temps de l'univers. Per a grans masses la temperatura molt petita del forat faria que la seva radiació fos molt lenta i de difícil detecció.

En la formació d'un forat negre perdem tota referència al seu procés, restant únicament els paràmetres *M, L, Q* que defineixen l’estat final intern; l'anterior ho expressa còmicament *Wheeler* quan afirma que *un forat negre no té pèl,* en no tenir el reflex de la seva història formativa.

Si l’entropia informativa corresponent a un sistema físic (vegeu l’apèndix 6) no precisa de la descripció de tots els seus microestats, ella serà inferior a *S/k.ln2*, on *S* és la seva entropia termodinàmica. En qualsevol cas, aquesta entropia termodinàmica no podrà ultrapassar mai la corresponent a un forat negre, amb la mateixa estructura geomètrica, que dependrà únicament de la seva superfície exterior, independentment del seu volum; en efecte: si aquella fos superior, l’absorció de massa fins esdevenir un forat negre contradiria el 2on principi de la termodinàmica.

Què passa, però, amb la informació que teníem de la matèria abans que aquesta penetrés al forat negre? Podrà ésser recuperada a partir de la radiació del forat? Per a un observador extern al forat a mesura que la matèria s'apropa al seu horitzó la informació que rep queda com paralitzada. Més endavant, la radiació del forat li permetrà anar rebent nova informació. En tot el procés l'entropia haurà anat augmentant. Podem, però, a partir de la nova informació rebuda recuperar l'antiga? *Hawking* ho nega tot raonant que quan la matèria cau dins del forat es perd la història prèvia i la radiació posterior és totalment aleatòria. Altrament, *'t Hooft* afirma, a partir de la reversibilitat de les transformacions *unitàries* quàntiques, que *sempre es pot recuperar la informació del passat.* Aquesta contradicció és causada probablement per la manca d'una teoria unitària de la gravitació quàntica. La relació entre la informació de *Shannon*, l'entropia i l'àrea d'un forat negre permetria, potser, emmagatzemar aquella en la seva superfície hologràficament i resoldre la paradoxa anterior. Seguint aquesta reflexió, no podria ocórrer que el nostre univers fos una ombra tridimensional, frontera d'un univers de dimensió superior?[10]

El procés contrari d'un forat negre, amb l'aparició de matèria, s'anomena *forat blanc.* El procés de radiació de *Hawking* no és pas el que s'obtindria per inversió temporal d'un forat negre i, en conseqüència, no és pas un forat blanc. Els forats blancs no han estat detectats a hores d'ara i el 2^{on} principi de la termodinàmica no els permetria una existència real.

L'aparició de l'univers primigeni no constitueix tampoc pròpiament un forat blanc, com veurem al final del capítol en estudiar el tensor de *Weyl*.

COSMOLOGIA

INTRODUCCIÓ

->Davant de l'homogeneïtat i isotropia espacials, el *principi cosmològic perfecte* afirma que l'univers també s'ha de veure igual en qualsevol època. Això ens portaria a *l'univers estacionari de Hoyle-Bondi-Gold.* En ell, amb el suport en part de *Narlikar* i

Sciama, si la densitat fos constant i compatible amb l'expansió, apareixeria la *creació* contínua i *minsa* de matèria (el seu petit valor no permetria detectar-la). La mètrica hauria de reflectir el caràcter estacionari amb l’addició d’*un camp escalar* que en fer extrema l'acció total donaria lloc a una equació on la massa creixeria amb el temps. L'anterior seria possible, gràcies a l’augment continuat de l'energia negativa d'aquell camp. Les dades experimentals han qüestionat aquest model, que ja no considerarem més.

->Nosaltres adoptarem ara la mètrica de l'espaitemps de *Robertson-Walker* corresponent al *principi cosmològic* de la màxima simetria de l'espai tridimensional *homogeni* i *isòtrop,* principi filosòfic propi d'un univers sense cap centre privilegiat en la línia de *Giordano Bruno*, (vegeu l'apartat sobre la *simetria màxima*) i acceptarem el *postulat de Weyl.* Aquest afirma que les línies d'univers de les galàxies, que seran tractades com a punts, formen un conjunt de geodèsiques amb un punt en comú (potser únic) i que al llarg de cada geodèsica galàctica les coordenades espacials romanen constants. També serà possible definir una coordenada temporal comuna, que coincidirà amb el corresponent temps propi de cada galàxia. A partir de la mètrica de *Robertson-Walker* es comprova aquesta propietat del temps, fent $h_{00} = c^2$, i que la distància entre les galàxies varia*, malgrat no canviar les seves coordenades*, degut a la presència del *factor d'escala S(t)*, depenent del temps (vegeu l'apartat de les *propietats mètriques*).

-> Finalment tenim que

$$ds^2 = c^2 dt^2 - S^2(t)\left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2)\right)$$

En el que segueix suposarem $c=1$, amb la qual cosa les velocitats es mesuraran en fraccions de la velocitat de la llum.

El tensor d'*Einstein*

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(R + \lambda) = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R + \Lambda.g^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} + \Lambda.g^{\alpha\beta}$$

inclou la *constant cosmològica* λ. *Einstein* introduí $\Lambda > 0$ i $k=1$ per tal de tenir un univers estàtic amb $\dot{S} = \ddot{S} = 0$ i més endavant es va penedir davant del que va considerar com *un dels més grans errors de la seva vida* (a més, aquest univers resultaria inestable!)[4].

Tanmateix, les observacions de *Hubble* i del seu ajudant, el muler *Humason,* fetes a *Mont Wilson* i basades en els resultats anteriors de *Slipher,* ajudant de *Lowell,* confirmaren que l'univers no és estàtic. La constant cosmològica és probablement petita, actuarà repulsivament i influirà només a escala cosmològica.

El tensor energia-impuls inclou les propietats de la matèria i del camp electromagnètic. Al començ de l'univers, *on les partícules tenien velocitats properes a c,* es verifica que

$$T^{\alpha\beta} = \frac{4}{3}(\rho_{rad} + \rho_{mat}).u^{\alpha}u^{\beta} - \frac{\rho_{rad} + \rho_{mat}}{3} g^{\alpha\beta}$$

, on ρ_{rad} és la densitat energètica *de la radiació i* ρ_{mat} la *de la matèria*, relacionades amb la pressió P segons $P = \rho / 3$. A hores d'ara podem ignorar els termes electromagnètics i tenim que

$$T^{\alpha\beta} = (P + \rho_{mat})u^{\alpha}u^{\beta} - P.g^{\alpha\beta}$$

Per a etapes intermèdies figuraran a $T^{\alpha\beta}$ els termes materials i electromagnètics conjuntament.

->A partir de la definició de la densitat energètica del *buit*

$$\rho_{buit} = \Lambda / 8\pi G$$

obtenim la densitat energètica total

$$\rho_{tot} = \rho_{mat} + \rho_{rad} + \rho_{buit}$$

Amb l'equació d'estat $p=C.\rho$ i les equacions d'*Einstein* arribem a les conclusions següents, segons la influència dominant dels components de la radiació (R), material (M) o del buit (B):

$$B: C = -1 \quad \rho = constant \quad R: C = 1/3 \quad \rho \propto 1/S^4 \quad M: C = 0 \quad \rho \propto 1/S^3$$
$$B: S(t) \propto exp(Lt) \text{ i per a temps " petits" } R: S(t) \propto \sqrt{t} \quad M: S(t) \propto t^{2/3}$$

, on $L^2=\Lambda/3$.[27]

La diferència de comportament a R i M és deguda a l'efecte gravitacional atractiu de la pressió fotònica i a la minva energètica pel desplaçament dels fotons al vermell, que veurem després.

En el cas M se suposa pressió nul·la (*univers de pols*). A l'univers tipus B la pressió és negativa, amb la gravitació repulsiva i la densitat energètica constant, i l'expansió és exponencial: *univers inflacionari*. Després de la inflació a l'univers primitiu la influència de la curvatura k és negligible i l'univers es comporta *com l'univers pla.* Als universos *R* i *M* $S(0)=0$ i tenim una singularitat.

En la *teoria del Big Bang* (vegeu més endavant) després d'una època amb una inflació inicial de curta durada aparegué el període dominat per la radiació En un temps no gaire gran l'expansió féu que progressivament la densitat de la matèria anés tenint més importància que l'electromagnètica a causa de la diferent relació temporal anterior. La majoria del temps de vida de l'univers ha transcorregut des d'aleshores dominat per la matèria i, potser, en part per l'energia del buit.

A partir d'ara, doncs, treballarem únicament amb un tensor energia-impuls de matèria (*universos de Friedmann*) i amb una *constant cosmològica* que pot ser diferent de zero.

ELS DIFERENTS TIPUS D'UNIVERS

A partir de les definicions

$$H(t) = \dot{S}(t)\ /\ S(t) \quad \rho(t) = \rho_{mat} + \rho_{buit} = \rho_M + \rho_\Lambda$$

$$\overline{\rho}(t) = 3H^2(t)\ /\ (8\pi G) \quad \Omega = \rho\ /\ \overline{\rho} = \rho_M\ /\ \overline{\rho} + \rho_\Lambda\ /\ \overline{\rho} = \Omega_M + \Omega_\Lambda$$

obtenim

$$\frac{k}{H^2.S^2} = \Omega - 1$$

El significat precís de *la constant de Hubble H* el veurem més endavant. Observem que tant H com Ω depenen del temps.

A partir del valor de la constant de *Hubble* H_0 en un temps t_0 trobem la relació funcional del factor d'escala $S(t)$ a través d'un desenvolupament de *Taylor:*

$$S(t) = S(t_0).(1 + H_0.(t - t_0) - \frac{1}{2}.q_0.H_0^2.(t - t_0)^2 + ...)$$

, on q_0 és *el paràmetre de desacceleració*

$$q_0 = -\frac{\ddot{S}}{S.H_0^2} = \frac{\Omega_0}{2}.(1 + 3C)$$

En absència de constant cosmològica aquest paràmetre és positiu i el factor d'escala té concavitat negativa. Amb la presència pura de la constant cosmològica ocorre el contrari. Amb la presència conjunta de matèria i de la constant cosmològica podem tenir un creixement del factor d'escala accelerat o desaccelerat, a partir de la importància relativa de Λ.

Segons el valor de *k* o, el que és equivalent, de Ω tindrem diferents geometries de l'espai:

1-Univers *d'Einstein-de Sitter* amb $k = 0$ i $\Omega=1$. Es tracta d'un univers *pla generalment infinit* (si la forma és *toroïdal* tridimensional tenim un univers finit) amb la *geometria euclidiana* i que té punts de similitud amb *l'univers de Lemaître.* En un espai euclidià les geodèsiques coincidents se separen i no tornen a ajuntar-se.

2-Univers *obert o hiperbòlic* amb $k = -1$ i $\Omega < 1$. Es tracta d'un univers *generalment infinit* (es poden trobar topologies molt especials en què l'univers pot ser obert i finit) on es compleix la geometria de *Lobachevski.*

En un espai amb curvatura negativa la separació de les geodèsiques inicialment coincidents no s'anul·la més.

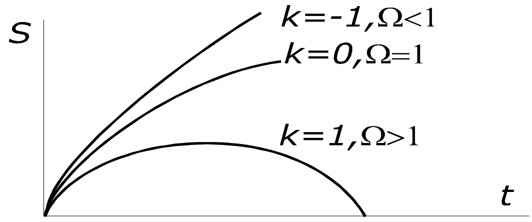
3-Univers *tancat o el·líptic* amb $k = 1$ i $\Omega > 1$. Tenim un univers *finit* i sense fronteres amb la geometria de *Gauss*.

En un espai de curvatura positiva i $\Lambda=0$ la separació de les geodèsiques inicialment coincidents s'anul·la finalment (amb $\Lambda>0$ podríem tenir un model obert amb curvatura positiva)

En el cas d'una constant cosmològica nul·la l'evolució de *S(t)* per a temps grans ($t \to \infty$) segueix aquestes lleis:

$$k = 0 \Rightarrow S(t) \propto t^{2/3} \quad k = -1 \Rightarrow S(t) \propto t \quad k = +1 \Rightarrow S(t) = S_1$$

, on S_1 a partir d'un valor màxim tendeix a zero (*Big Crunch*). La figura següent ens indica l'evolució *S(t)* segons el valor de *k* (a l'origen aquesta evolució és independent de *k*):



Es comprova que *amb l'absència de la constant cosmològica la geometria de l'espai està totalment relacionada amb el tipus d'expansió.* Als tres models l'univers té inicialment *una singularitat inicial* amb l'aparició de l'espai i del temps que ja intuí *Sant Agustí* i s'expandeix (*Big Bang*)[3]. El ritme de l'expansió es *desaccelera*, l'expansió continua indefinidament als models infinits o bé s'atura al models finits, amb unes dimensions màximes de l'univers, per acabar en una singularitat final (*Big Crunch*). La idea del *Big Bang* sembla que és original de *Lemaître* i *Hoyle* la batejà així despectivament davant dels qui, com *Gamow, Alpher* i *Herman,* la defensaven.

L'expansió de l'univers s'hagués pogut descobrir el segle XVII a partir de la formulació de la física newtoniana. Els prejudicis filosòfics sobre un univers immutable, però, impediren arribar a aquella conclusió abans del segle XX.

Afegint una constant cosmològica $\Lambda > 0$, aquesta es manifestaria amb una força de repulsió que *podria accelerar* el ritme d'expansió[4]. *La densitat energètica total, a través del seu paràmetre* $\Omega=\Omega_M+\Omega_\Lambda$, *seria la que fixaria la geometria de l'univers i* Ω_Λ *condicionaria en part el tipus d'expansió, indefinida o no. La geo-metria (curvatura nul·la, negativa o positiva) i la dinàmica (plana, oberta o tancada) no estarien rígidament lligades.*

En els tres models anteriors d'univers amb una curvatura constant la seva topologia és molt senzilla i la variació de *S(t)* no afecta el seu caràcter d'infinit o finit. Topologies més complexes, com la *dodecaèdrica* de *Poincaré*, permetrien rebre la informació exterior repetida i tenir un univers amb una grandària aparent superior a la real.

DISTÀNCIES I HORITZONS

L'element diferencial de longitud espacial serà

$$dl^2 = S^2(t)(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\Phi^2))$$

Si ens desplacem radialment, l'expressió anterior se simplificarà:

$$dl^2 = S^2(t).\frac{dr^2}{1 - kr^2}$$

D'aquí obtenim la distància radial entre dos punts de radis r_1 i r_2, amb $r_1<r_2$ en el temps t:

$$D = S(t).\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

Si $k=1$ i fem $r_1 = 0$, $D = S(t) \cdot arc\ sin\ r_2$. Això ens indica que $S(t)$ és un "bon indicador" del "radi" de l'univers.

En el cas d'un raig de llum amb $ds=0$, si viatja radialment entre dos punts (r_1, t_1) i (r_2, t_2), tindrem que

$$dt = S(t).\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

i es verificarà

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{S(t)} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$

L'*horitzó* $d_h(t)$ és la màxima distància a què es troben en el temps t els objectes que es poden veure en el mateix instant t (evidentment la informació rebuda correspon a un instant anterior). Aquesta distància la podem trobar a partir de l'expressió

$$d_h(t) = \lim_{t_1 \to 0} S(t).\int_{t_1}^{t} \frac{dt}{S(t)}$$

, on $t_1=0$ representa el moment del *Big Bang*.

A l'època de la radiació amb $S(t) \propto t^{1/2}$ tenim $d_h(t)=2t$.

A l'època material amb $S(t) \propto t^{2/3}$ obtenim $d_h(t)=3t$.

L'expansió còsmica allarga les distàncies i $d_h(t)>t$.

Amb el pas del temps l'horitzó creix més ràpidament que el factor d'escala i, per tant, ampliem la zona de l'univers que podem visualitzar, altrament al que ocorreria en un univers accelerat a través d'una constant cosmològica *adient*, en el qual el conjunt d'objectes visibles aniria minvant progressivament.

EL DESPLAÇAMENT AL VERMELL

Suposem ara una ona lluminosa que viatgi radialment des d'una galàxia G_1, amb coordenades $r = r_1$ i $t=t_1$, al nostre punt d'observació situat a la galàxia G_O, amb coordenades $r_0 = 0$ i $t=t_0$. A partir de les equacions de les geodèsiques lluminoses corresponents a dues crestes successives trobem la relació entre les longituds d'ona mesurades a les dues galàxies (el raonament senzill realitzat a l'apartat sobre *el desplaçament al vermell* no es pot fer aquí perquè la mètrica no és estàtica). Obtenim el resultat següent:

$$z_1 = (\lambda_0 - \lambda_1) / \lambda_1 \qquad 1 + z_1 = \frac{S(t_0)}{S(t_1)}$$

Si experimentalment comprovem el desplaçament cap al vermell de l'espectre lluminós rebut des de les galàxies, tindrem que $\lambda_0 > \lambda_1$ i, per tant, $z_1 > 0$ i $S(t_0)>S(t_1)$. Això ens indica que el factor d'escala creix actualment, la qual cosa és equivalent, per les propietats mètriques, que les distàncies entre les galàxies augmenten (*expansió de l'univers), malgrat no variar les seves coordenades espacials.*

Per a distàncies no gaire grans i per a un univers aproximadament pla trobem la relació

$$z_1 = H(t_O).D_1$$

, expressió matemàtica de la *llei de Hubble* on el desplaçament z_1 és proporcional a la distància D_1 on es troba *actualment* la galàxia que ens ha enviat *abans* l'ona lluminosa. *La velocitat de recessió* galàctica resulta ser $v=H(t_0).D_1$. La imatge més senzilla de l'expansió la podem tenir en un globus amb punts pintats i que es va inflant: *cada punt esdevé el centre* des d'on hom observa la recessió. Tanmateix, les dimensions dels objectes físics no varien a causa de les interaccions internes que contraresten l'expansió.

El desplaçament al vermell no és degut a l'efecte *Doppler* causat pel moviment dins de l'espai, sinó a l'expansió d'aquest.

L'anterior és compatible amb els moviments relatius que hi ha entre les galàxies dins de l'espai, com ocorre amb l'atracció entre la *Via Làctia* i *Andròmeda.* És aquesta mateixa expansió de l'espai la que pot donar lloc paradoxalment a velocitats més grans que les de la llum quan *erròniament* suposem que l'efecte de la recessió galàctica s'efectua dins l'espai.

Podríem, fins i tot, visualitzar una galàxia que en tot moment tingués una velocitat de recessió més gran que la de la llum. Això és degut al fet que amb una constant cosmològica petita la constant de *Hubble* disminueix contínuament, amb la qual cosa la distància a partir de la qual podem veure els objectes físics es va ampliant i amb el temps els fotons emesos per la galàxia podrien superar aquest límit i arribar fins a nosaltres.

La *paradoxa d'Olbers,* que es preguntava per què el cel a la nit no era immensament brillant, es resol pel desplaçament cap al vermell, que dóna lloc a una minva de l'energia que observem, i per la situació de moltes galàxies més enllà del nostre horitzó.

L'EDAT DE L'UNIVERS

H(t) té una relació funcional amb *S(t),* la qual cosa ens permet trobar *l'edat de l'univers* a partir del valor actual de *H(t).* Es pot deduir la dependència que té la diferència t_1-t_0, entre els instants d'emissió i de recepció d'una ona electromagnètica, amb z_1 i H_0. En el límit quan $t_1 \to 0$ (o equivalentment $S_1 \to 0$ i $z_1 \to \infty$), t_0 serà l'edat de l'univers. Per a $\Omega_M=1$ i $\Omega_\Lambda=0$ obtenim

$$Edat\ de\ l'univers = \frac{2}{3.H_0}$$

L'edat de l'univers, degut a l'homogeneïtat d'aquest, és independent de l'observador elegit.

EL MODEL DEL BIG BANG

Introduïm aquí el model del *Big Bang* per conveniència pràctica. Tanmateix, per entendre alguns conceptes caldrà abans haver llegit alguns apartats dels capítols 8, 9, 10 i 11 i de l'apèndix 5.

D'acord amb el que hem vist anteriorment, podem fer-ne un resum, de les idees bàsiques que constitueixen *el model del Big Bang.* Aquest model, recordem-ho, no implica cap afirmació sobre l'existència d'una singularitat inicial (*Big Bang*). En el que segueix tots els valors seran només indicatius, ja que constantment són modificats d'acord amb les investigacions i les noves dades experimentals. Durant l'expansió de l'univers la seva temperatura disminuirà degut a l'augment de l'energia potencial gravitatòria. A l'època de la radiació la relació entre la temperatura *T* i el temps *t* ve donada per la proporcionalitat $T^2 \propto 1/t$. Les energies de les diferents partícules aniran variant, segons les seves distribucions estadístiques i això ens permetrà el càlcul de les seccions eficaces de les distintes reaccions possibles. En els temps primordials les velocitats de les partícules eren molt properes a la de la llum *(era de la radiació*). Amb velocitats lumíniques les partícules tenen dos graus de llibertat. A partir de les seves distribucions estadístiques es comprova que l'energia mitjana d'una partícula verifica el teorema d'equipartició de l'energia (vegeu l'apèndix 5) i val

$$E = k.T$$

, on k és la constant de *Boltzmann*. Això ens dóna una relació aproximada d'uns 10.000K per cada eV.

->*Abans de 10^{-44}s de l'origen de l'univers*: Per a una massa en què el seu radi de *Schwarzschild* fos igual a la seva longitud d'ona associada, anomenada de *de Broglie* o de *Compton*, (vegeu l'apartat de "La partícula lliure" al capítol 7) es verificaria

$$r_s = \frac{2Gm}{c^2} = \lambda_C = \frac{h}{mc}$$

A partir de l'energia i la longitud de *Compton* corresponents definim l'*energia* i *longitud de Planck* tot ignorant les constants diferents de c, G i $\hbar$ que hi apareixen. El temps que triga la llum en recórrer la longitud de *Planck* és *el temps de Planck.* D'aquí es troba immediatament:

Energia de *Planck*=$(c^5\hbar/G)^{1/2} \cong 10^{19}$ *GeV*.

Longitud de *Planck*=$(\hbar G/c^3)^{1/2} \cong 10^{-35}m$.

Temps de *Planck*=$(\hbar G/c^5)^{1/2} \cong 10^{-44}s$.

Per a energies superiors a l'energia de *Planck* la longitud de *Compton* seria inferior al radi de *Schwartzschild* i es formaria un miniforat negre degut que la partícula estaria "concentrada" dins del seu radi de *Schwartzchild*. L'evaporació de *Hawking*, tanmateix, es realitzaria en un temps inferior al temps de *Planck*! Tot això ens fa veure que les dades anteriors constitueixen un límit del model estàndard i que cal una teoria de la gravitació quàntica per al seu estudi.

Les temperatures corresponents a energies que ultrapassin l'energia de *Planck* serien, pel que hem dit més amunt, superiors a $10^{32}K$ i els efectes quàntics de la gravitació no es podrien negligir. La nostra ignorància actual ens impedeix fer qualsevol comentari addicional mitjanament profund. Ens trobem a ***l'era de la gravitació quàntica o era de Planck***.

->***Després de 10^{-44} s***: A partir d'ara hi haurà una mescla radiació+quarks/antiquarks+leptons/antileptons. Els científics no es posen del tot d'acord amb la nomenclatura de les diferents eres que segueixen. Degut a les velocitats lumíniques, nosaltres *anomenarem* ***era de la radiació*** la que transcorre des de l'era de *Planck* fins que s'assoleixen els 4.000K en què la matèria comença a dominar la radiació i s'inicia l'*era de la matèria*. Les eres *hadrònica* i *leptònica* formaran part de l'època de la radiació i l'era material inclourà les eres de la *recombinació*, la *foscor* i l'*estel·lar*.

->Abans de 10^{-35}s: La simetria $SU(5)$ hi és present. Les partícules X i les conversions entre leptons i quarks hi juguen un paper cabdal. L'asimetria matèria-antimatèria s'originarà aquí.

->Aproximadament a 10^{-35}s: L'energia mitjana de les partícules val $10^{15}GeV$ (de l'ordre de m_X), la seva temperatura $10^{28}K$ i apareix la transició de fase: $SU(5) \to SU(3)_C x SU(2) x U(1)$.

->Abans de 10^{-11}s: Els bosons amb massa nul·la permeten una interacció $SU(2)$ on els neutrins juguen un paper fonamental. Hi ha un *plasma* de leptons, quarks i bosons intermedis. La interacció electrofeble és molt important. La llibertat asimptòtica fa que la interacció forta no sigui rellevant. Els sistemes partícula-antipartícula s'anihilen formant fotons. L'alta temperatura permet, tanmateix, la creació de matèria-antimatèria a partir dels fotons: *hi ha un equilibri químic i termodinàmic de la matèria-radiació on les densitats de totes les partícules són molt semblants.*

->Aproximadament a 10^{-11}s: La temperatura continua decreixent i apareix la segona transició de fase, amb energies de l'ordre de m_W m_Z: $SU(3)_C x SU(2) x U(1) \to SU(3)_C x U(1)$. Les tres interaccions, forta i electrofeble, es desacoblen. La interacció feble és cada vegada menys important.

->Entre 10^{-6}i 10^{-4}s (era hadrònica): L'energia mitjana ha disminuït fins a superar la llibertat asimptòtica dels quarks lliures. *Es formen els primers hadrons:* els protons i neutrons esdevenen possibles (*bariogènesi*). A més, l'energia no és suficient per a la formació de parelles quark-antiquark a partir de fotons. Finalment els conjunts quark-antiquark existents s'anihilen i es creen fotons. Resta només "l'excés" de matèria. L'eliminació de la majoria dels quarks-antiquarks i l'augment dels fotons origina un creixement "sobtat" de la temperatura de tot el conjunt (vegeu l'apèndix 5).

->Fins a 10s (era leptònica): La progressiva poca importància de la interacció feble i la disminució de la temperatura condueixen al *desacoblament dels neutrins*, que resten lliures. No apareix cap canvi sobtat de la temperatura. La molt feble interacció dels neutrins (poden travessar *100* anys-llum de plom sense adonar-se'n!) fa que ells siguin els primers a desacoblar-se'n.

L'energia a la fi ja no és suficient per a la creació de parelles leptó-antileptó i aquests s'anihilen amb la formació de fotons: més enllà de l'era leptònica restarà només el romanent de matèria electrònica. Amb la desaparició de la majoria de leptons hi haurà el segon augment sobtat de la temperatura fotònica i material. Els neutrins desacoblats amb anterioritat tindran una temperatura inferior a la fotònica i la seva temperatura evolucionarà independentment (vegeu l'apèndix 5). *A partir d'ara el que passa és ben conegut experimentalment.*

->Fins als 3 minuts: La disminució progressiva de la temperatura amb la minva corresponent de l'energia fotònica farà que aquesta no destrueixi la formació, possible des de molt abans, de nuclis més complexos que així esdevindran estables. La *massa* total tindrà aproximadament *75%* d'hidrogen, *23%* d'heli i la resta entre deuteri i liti, fonamentalment (*nucleogènesi*).

Molt crítica és la formació de deuteri. Quan s'assoleix la temperatura que permet la formació de deuteri, aquest es destrueix ràpidament (*encallament del deuteri*). Cal una temperatura adient que permeti la seva formació. Tanmateix, és necessari un refredament posterior que permeti la seva presència. Als estels això no és possible, però aquí amb l'expansió sí que ho és.

->Més enllà dels tres minuts: De les parelles electró-positró destruïdes abans resta el romanent necessari d'electrons per equilibrar elèctricament els protons residuals.

A *4000K* l'era de la radiació dóna pas a ***l'era de la matèria,*** en disminuir més ràpidament la densitat energètica de la radiació.

->Aproximadament al cap de 300.000 anys: A l'era de la ***recombinació*** la *formació contínua d'àtoms* a partir de la unió de nuclis i electrons elimina molts electrons lliures. Això impedeix la interacció electromagnètica i permet *el desacoblament de la* *radiació amb l'estructura espectral del cos negre (3000K).* Entrem a l'*__era cosmològica de la foscor__*.

->A partir d'uns 500.000 anys: Amb el desacoblament de la radiació i la disminució tèrmica, la massa mínima necessària (*massa de Jeans*) perquè la gravitació superi la pressió tèrmica i produeixi l'agrupament de matèria disminueix fortament: és ***l'era estel·lar*** i, amb la seva llum, la fi de l'era de la *foscor.* Les distàncies més curtes a l'univers primigeni facilitaren que els seus estels tinguessin una massa i una lluminositat més grans i una vida més petita que els actuals. Les *inestabilitats quàntiques locals* i les *irregularitats* sorgides pel contacte de zones on la ruptura de simetria, deguda a una *transició de fase,* es féu amb una elecció diferent del camp del buit de *Higgs* i que originaren les *cordes còsmiques,* seran les llavors per *crear estructures com les estrelles i galàxies.* La senzillesa de les lleis del macrocosmos i del microcosmos donarà pas a la complexitat de les estructures intermèdies de la vida.

->Uns 13700×10^6 anys: La temperatura de l'univers dels fotons és només d'uns *2.7K*. Tanmateix, la radiació de fons conté més energia que la de tots els estels, degut que aquests ocupen un volum molt petit de l'univers. La *FMC=Fons de Microones Còsmiques ("CMB"= "Cosmic Microwave Background"*) és un fòssil del passat que conserva l'estructura espectral del cos negre. L'anterior ens donaria una proporció *aproximada* d'uns 10^9 fotons/m^3.

Els neutrins de fons desacoblats i encara no detectats, amb un nombre total del mateix ordre que el de fotons, tenint en compte totes les famílies, continuen posseint una temperatura inferior a la dels fotons. Degut al seu gran nombre, la massa dels diferents neutrins podria condicionar el model del nostre univers.

PROBLEMES COSMOLÒGICS

El càlcul de H_0 i l'edat de l'univers

La dificultat en el càlcul de distàncies creix quan els objectes se n'allunyen més de nosaltres (a l'apèndix 7 tractem amb més de detall el càlcul de les distàncies d'objectes llunyans). El contrari passa amb la mesura del paràmetre *z* de desplaçament al vermell, que és massa petit per a objectes molt propers. Sigui com sigui, podem arribar a trobar a partir d'ambdós els límits en què la constant de *Hubble* actual es troba. Això ens permet fitar l'edat de l'univers. L'edat de l'univers disminueix en augmentar el valor de la constant de *Hubble*. Un ritme d'expansió en el passat menor del previst faria que amb l'estat actual de l'univers el seu temps de vida fos més gran. Una expansió accelerada en l'actualitat possibilitaria el fenomen anterior i ajudaria a eliminar l'absurd que l'edat de l'univers fos inferior a la d'alguns estels.

El *temps de Hubble* és defineix com el recíproc de la constant de *Hubble*. Depenent del valor precís de la constant de *Hubble*, el temps de *Hubble* oscil·la entre *9.000* i *18.000* milions d'anys. El *radi de Hubble* és la distància recorreguda per la llum en el temps de *Hubble* i està fitada entre *9.000* i *18.000* milions d'anys-llum. El temps de *Hubble* representaria aproximadament l'edat de l'univers (vegeu l'apartat corresponent d'aquest capítol). El temps i el radi de *Hubble* ens donen una "orientació" sobre l'edat i el radi de l'univers observable, respectivament.

Sandage, entre d'altres, ha estudiat en profunditat el problema de l'edat de l'univers. El seu valor a partir de les dades del *telescopi espacial Hubble* està al voltant de *13.700* milions d'anys.

L'acceleració de l'univers

El coneixement teòric de la lluminositat absoluta de les *supernoves tipus Ia* (*candeles estàndard*) i la mesura de la seva lluminositat aparent permet contrastar la relació funcional experimental entre aquesta darrera i el desplaçament z amb la relació funcional teòrica per a diferents classes d'univers definits per a distints valors dels paràmetres Ω_M i Ω_Λ ($\Omega=1$ i l'univers pla). Per comparació entre les dades teòriques i les experimentals sembla que podríem tenir una constant cosmològica no nul·la i que l'expansió de l'univers s'estaria accelerant actualment. Aleshores, quin seria el significat pregon de la interacció del buit?

La inflació i els problemes de k=0 i de l'horitzó

La teoria de la inflació de Guth afirma que inicialment hi hagué una expansió exponencial accelerada de l'univers per la presència de *camps escalars* tipus *Higgs* (vegeu el capítol 10). Aquests camps (*inflatons*) són l'origen d'una pressió negativa (causada per matèria exòtica?) que provocà la inflació. L'estat de *fals buit* de l'inflató situat al turó de *Higgs* creà l'expansió sense variar, com fa la constant cosmològica a què dóna lloc, la seva densitat energètica i, en conseqüència, la seva energia anà creixent gràcies a una energia gravitacional cada cop més negativa.

Finalment, el camp s'anà desintegrant i la disminució energètica *local* del camp fins arribar al *buit real* de la vall de *Higgs* creà la matèria en un racó de *l'Univers*: el nostre *univers*. Després de la inflació l'expansió continuà al ritme normal de la teoria del *Big Bang* dins d'aquest racó de l'Univers on vivim. L'expansió de l'espai es realitzà a velocitat més gran que *c* i les *minses* fluctuacions quàntiques *locals* s'amplificaren per poder generar més tard les llavors gravitacionals. La teoria *VSL*="Varying-Speed-of Light theory" és una alternativa a la inflació poc acceptada: a l'origen de l'univers podríem tenir una velocitat de la llum molt més gran que l'actual i això ens permetria donar una solució a alguns dels problemes cosmològics. Com complement al que hem dit, vegeu l'efecte *Scharnhorst* dins del capítol 8, que preveu una velocitat de la llum variable en funció de les fluctuacions del buit.

La inflació explica l'homogeneïtat i la uniformitat de zones situades cadascuna més enllà de l'horitzó de l'altra (*problema de l'horitzó*) i per què l'univers és quasi pla (*problema de k=0*): inicialment aquelles zones haurien estat en contacte i la forta inflació donaria lloc, amb el ritme actual d'expansió, a l'aparença de la seva incomunicació; i l'univers evolucionaria fins assolir un valor de $\Omega \cong 1$, ja que la inflació, altrament al que ocorre amb l'atracció gravitatòria, disminueix les desviacions de la densitat respecte del valor crític (un valor de Ω molt diferent d'*1* hauria fet que l'univers ja hagués col·lapsat o bé que hagués tingut una expansió ràpida amb una ρ actual molt petita i no s'haurien format les galàxies!).[19]

Després de la inflació l'expansió més lenta permetria que progressivament els horitzons s'anessin ampliant. El procés es podria repetir dins (a través d'un forat negre?) i fora de l'univers amb la possibilitat de *múltiples universos amb lleis diferents* (*el multiunivers*). L'estat del multiunivers seria, potser, semblant al de l'estat estacionari amb múltiples universos fills en el seu si. Tindríem *l'Univers inflacionari etern* amb una estructura *fractal* i on els universos naixerien, es desenvoluparien i, potser, moririen.

Segons la teoria més comunament acceptada (*Linde, Prigogine*) *una inestabilitat quàntica* del buit, que la inflació amplià, (vegeu el principi d'incertesa de l'energia) originaria els valors inicials de la curvatura, matèria i entropia[5] i l'escuma de l'espaitemps i les altes energies crearien els *forats de cuc* microscòpics primordials.

En el període de la inflació s'haurien originat ones gravitatòries que romandrien al llarg de l'evolució de l'univers. Aquestes ones gravitacionals tindrien el seu origen en els gravitons virtuals sorgits des del buit quàntic inestable i que l'expansió impedí anihilar posteriorment (els fòssils gravitacionals precedirien, en conseqüència, als fons posteriors de neutrins i de fotons). Les ones gravitatòries primordials haurien deixat la seva petjada en la polarització de la radiació de fons, sumant la seva acció a la de les irregularitats de massa d'aquella època. L'estudi de la radiació electromagnètica residual ens podria donar a conèixer l'efecte de les ones gravitacionals primigènies i ens aproparia al temps llunyà d'uns $10^{-38}s$ després de la gran explosió.

El problema de la matèria de l'univers

A través de les consideracions fetes entorn a la inflació, sembla que el nostre univers és pla o gairebé pla. El coneixement de la constant de *Hubble* ens permet calcular la densitat crítica d'uns *5* àtoms/m^3, corresponent a $\Omega=1$. La matèria visible, amb *aproximadament 0.1* àtoms/m^3 i $\Omega=0.02$, representa un *2*% del valor anterior, quantitat del tot insuficient, perquè a l'univers siguin possibles dos fenòmens experimentalment comprovats:

a) Matèria addicional és necessària per impedir la disgregació d'estructures materials. També ho és per explicar els moviments de determinades estructures galàctiques i els efectes òptics provocats per *lents gravitacionals* que ens permeten ampliar la visió de l'univers. Així arribem a un valor aproximat de $\Omega=0.3<<1$.

b) La teoria del *Big Bang* explica les proporcions d'hidrogen, heli, deuteri i liti, fonamentalment. La formació del deuteri és altament sensible a la densitat: per a la seva formació cal una temperatura elevada i que la densitat total disminueixi ràpidament per tal que el deuteri format no desaparegui del tot. Això no és possible en els estels, però sí en un univers en expansió. La proporció detectada de deuteri és compatible amb una densitat actual d'uns *0,25* àtoms/m^3 que donaria lloc a un valor de $\Omega=0{,}05$.

De tot l'anterior resulta clar que la matèria fosca necessària serà, en part, fonamentalment no bariònica, i, en qualsevol cas, insuficient per arribar a la densitat crítica. On es troba? En els MACHO="Massive Compact Halo Objectes", anomenats així perquè es podrien trobar a l'halo galàctic, on hi hauria la *matèria bariònica* dels nans marrons o blaus, estels de neutrons o forats negres? En la *matèria no bariònica* exòtica dels companys supersimètrics o *WIMPS*="Weakly Interacting Massive Particles" i dels lleugers i paradoxalment lents axions, que constituirien part de la *matèria fosca freda CDM*="Cold Dark Matter"? En la *matèria fosca calenta HDM*= "Hot Dark Matter" dels neutrins? O en el *Higgs*?

Sembla, doncs, cada vegada més probable que els camins físics vagin abandonant la recerca d'una matèria fosca que porti a $\Omega=1$ i es dirigeixin a l'estudi de la constant cosmològica o de la seva alternativa dels camps escalars de la "*cinquena essència*".

La idea comunament acceptada que les forces aparents gravitacionals i la geometria no euclidiana només poden ser causades per la matèria és falsa: amb la presència d'una constant cosmològica les equacions d'*Einstein* admeten solucions on hi hagi efectes geomètrics de curvatura i dinàmics repulsius creixents amb la distància: el buit no és el no-res!

Especulacions entorn del punt Ω

Com sabem, en qualsevol temps hi ha un valor màxim per a la distància en què es troben els objectes del quals podem rebre informació del seu passat. Aquest valor defineix *la distància a l'horitzó*. L'existència d'horitzons ens limita les relacions causals entre objectes de l'univers.

Amb la presència a *E* de línies temporals que no acabin en un punt del seu futur, cadascuna d'elles es pot *completar* amb un punt frontera fora de l'espaitemps: es tracta dels punts *c-frontera*, amb una relació causal amb altres esdeveniments del passat.

Sota determinades condicions geomètriques, hi haurà un únic punt *c-frontera*, l'Ω, amb una relació causal amb *tot* l'univers i absència d'horitzons. L'afirmació de *Tipler* en què vora Ω es pot *recuperar* tot el passat d'una forma nova és molt controvertible.[25]

El problema de les singularitats[25]

La *relativitat general global* amb l'ajut de la topologia i la geometria diferencial permet deduir moltes propietats de l'univers i de la seva evolució. La necessitat de l'existència de singularitats deduïda sota hipòtesis molt generals (*teorema de Hawking-Penrose*) és molt problemàtica. *Hawking* rebutja actualment aquesta possibilitat tot remarcant que, *sota altres hipòtesis*, les singularitats no són pas una conseqüència de la relativitat general. *Hawking* i *Hartle,* per facilitar els càlculs, realitzen el canvi de variable de t per $x.i$, amb $i^2=-1$, i construeixen un univers amb una mètrica *euclidiana* i les quatre coordenades espacials, la qual cosa els permet fer l'estudi quàntic de l'univers amb la suma sobre històries de *Feynman* (vegeu el capítol 7). L'univers euclidià no tindria ni fronteres ni singularitats i seria l'equivalent a una "petita closca de nou" quadridimensional, en paraules de *Hawking*, amb la informació perquè aparegués l'univers espaciotemporal *present*, com a única condició de contorn. El nostre univers tindria un passat finit on el temps naixeria sense singularitat inicial, estaria completament "autocontingut" i no es veuria afectat per res que estigués fora d'ell: no seria creat ni destruït, simplement SERIA.[27]

La rugositat de l'univers

L'homogeneïtat mitjana de l'univers ha de ser compatible amb les irregularitats locals que permetin l'estat actual amb estructures com les estrelles i les galàxies i amb l'anisotropia del *FMC*. El paràmetre de *rugositat Q* ens indica quina és l'energia necessària perquè les estructures es destrueixin, expressada com a fracció de l'energia de la seva massa en repòs. Aquest valor, *per als cúmuls i supercúmuls*, està al voltant de 10^{-5} (és la mateixa fracció de disminució de la temperatura que rebríem a la radiació de fons des d'un cúmul embrionari, pel corriment al vermell addicional degut a l'augment gravitacional de l'estructura còsmica). Segons la teoria de *Harrison-Zeldovich Q* té el mateix valor per a totes les dimensions d'aquestes estructures i és una constant universal. La seva petitesa ens fa veure que la gravitació necessària per a la formació de les estructures galàctiques és força feble. Amb un valor de *Q* molt inferior la matèria no es condensaria; i amb un valor molt superior la matèria es convertiria finalment en forats negres.

El valor de la rugositat ha de fer possible la formació d'estructures i ha de ser el suficientment petit perquè la hipòtesi global d'homogeneïtat sigui correcta. Les dades experimentals ens ho confirmen.

La detecció de la *radiació de fons* per *Penzias* i *Wilson* sembla confirmar en part els càlculs realitzats per *Gamow* i posteriorment per *Dicke i Peebles* i la distribució de freqüències permet conèixer la seva temperatura actual d'uns *2.7K*. En realitat, la interpretació teòrica dels resultats experimentals anteriors fou feta per *Dicke*, veritable descobridor de la radiació de fons i injustament oblidat per la Història. L'esmentada radiació de fons roman com un fòssil del passat i és molt aproximadament isòtropa. La detecció en la "CMB" per les sondes COBE ("Cosmic Background Explorer"), WMAP ("Wilkinson Microwave Anisotropy Probe") i altres de diferències apreciables en la temperatura i la presència d'una petita polarització causada per un efecte *Thomson* no compensat *globalment* (Vegeu el capítol 5) demostren la no-isotropia de la radiació de fons. Amb el desacoblament matèria-radiació la radiació no va ser afectada per igual en tots els punts i la seva temperatura i polarització depengueren de les irregularitats locals de densitat que condicionaren el desplaçament al vermell (*efecte Sachs-Wolfe*). Les diferències de densitat sorgirien, en part, per la "simfonia còsmica" de la matèria sotmesa a l'alternança de la compressió i rarefacció causades per l'efecte preponderant de la gravitació i de la radiació fotònica abans de la recombinació, respectivament.[6]

Les irregularitats topològiques puntuals podrien haver donat lloc als monopols magnètics, estudiats per *Polyakov* i *'t Hooft*, i la inflació diluiria i dificultaria la seva detecció. Les irregularitats lineals originarien les cordes còsmiques que actuarien com a llavors de les galàxies. L'estudi de l'anisotropia del *FMC* permet conèixer les proporcions de les matèries ordinària i exòtica.

Els universos alternatius

->*Godel* ha trobat una solució no machiana en el marc de la relativitat general que representa un univers en rotació. La mètrica emprada, diferent de la de *Robertson-Walker* (no oblidem que el principi cosmològic és un afegit a la relativitat general), permet sistemes localment inercials des dels quals s'observa la rotació de les galàxies, en contra dels supòsits de *Mach*. Això ens indica que la idea d'*Einstein* d'obtenir el principi de *Mach* a partir de la seva teoria de la gravitació és falsa (la qual cosa no vol dir que no pugui deduir-se d'una altra teoria de la gravetat). L'afirmació anterior no menysté els esforços realitzats pel mateix *Einstein*: ell demostrà teòricament que l'acceleració d'una massa influeix en les trajectòries dels altres cossos i és origen d'una força de tipus machià. L'univers godelià té la característica addicional de permetre línies temporals tancades, amb la qual cosa els viatges en el temps serien possibles i la causalitat estaria compromesa.

->En la *cosmologia de Bianchi* es postula l'homogeneïtat, però no la isotropia. Admet aspectes dissipatius en l'estudi del fluid còsmic i les seves geometries són més complicades que les que hem vistes fins ara.

->En la *cosmologia de Brans-Dicke* hi apareix, a més dels deu components del camp gravitatori, un escalar que dóna lloc a la variació de la constant gravitatòria *G* al llarg del temps. Segons alguns, aquesta teoria podria satisfer el principi de *Mach*.

->En la *cosmologia de Dirac* les constants fonamentals s'expliquen a partir de les propietats a gran escala de l'univers, com la seva edat i la densitat mitjana. La variació de les constants universals hauria de ser molt lenta actualment. En particular, una velocitat més gran de la llum en els orígens de l'univers produiria uns efectes similars, en part, als de la inflació.

El misteri de la precisió del nostre univers

La realització de molts de processos del nostre univers requereix un ajustament molt fi de constants i paràmetres. És això una casualitat? És, potser, que el nostre univers no pot ser d'una altra manera i que nosaltres ignorem les raons ocultes?

Una variació en la intensitat relativa de la interacció electromagnètica en relació a la gravitacional (N), en el rendiment energètic per fusió de l'hidrogen (ε), o en els valors de Ω, Λ i Q donaria lloc o bé a un univers de curta vida o a un on no seria possible la formació d'estructures galàctiques o estel·lars. Una dimensió D<3 no permetria un aparell digestiu com el nostre i una D>3 donaria lloc a inestabilitats en les òrbites planetàries. En qualsevol dels casos no seria possible l'evolució biològica fins arribar a l'home!

El *principi antròpic feble* diu que les coses són com són, perquè altrament l'home no seria possible. Sense més aclariments, això no explica absolutament res.

El *principi antròpic fort* afirma que el món és com és, perquè sorgeixi l'home: apareix, doncs, una finalitat en el procés còsmic.

El principi antròpic fort afirma que l'home apareix, perquè és essencial. El principi antròpic feble diu que l'home ho fa, malgrat no ser essencial. Què és, però, allò essencial?

El *multiunivers o metavers* permetria que els diferents universos tinguessin constants fonamentals i característiques molt diferents. El nostre univers seria un d'ells i, en part, fruit de la casualitat: el principi antròpic feble tindria una significació plena i, segons *Rees*, explicaria els valors dels sis nombres fonamentals anteriors, N, ε, Ω, Λ, Q i D, a través de l'atzar.

TRANSFORMACIONS CONFORMES

Les transformacions del tipus

$$g^*_{\alpha\beta} = \Omega^2 . g_{\alpha\beta} \quad ds^{*2} = \Omega^2 . ds^2$$

, on $\Omega(x^\alpha)$ és una funció arbitrària de les coordenades, s'anomenen *conformes* (fixem-nos que no es tracta d'un canvi de coordenades). Una teoria, com l'electromagnetisme, que no varia amb la inclusió de Ω posseeix la *invariància conforme.*

Les transformacions conformes preserven la *causalitat* en conservar el signe de l'interval ds^2 o el seu valor nul.

Una variant de tot l'anterior permet fer amb els *diagrames conformes* una *representació conforme i plana* de l'espaitemps que facilita la comprensió dels processos cosmològics.

Definim el *tensor de Weyl*

$$C^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} + F(g_{\alpha\beta}, R_{\alpha\beta}, R)$$

, on l'expressió *F* no la desenvolupem, amb aquestes propietats:

1-El tensor de *Weyl* és invariant per transformacions conformes, cosa que no passa amb els tensors de *Riemann* i *Ricci*.

2-En una mètrica plana el tensor de *Weyl* és nul. Això implica que en una mètrica conformement plana es verifica que

$$ds^2 = \Omega^2 \eta_{\alpha\beta}$$

i el seu tensor de *Weyl* és nul.

3-Si el tensor de *Ricci* és nul, els tensors de *Weyl* i de *Riemann* coincideixen.

4-La mètrica cosmològica de *Robertson-Walker* pot per mitjà d'un canvi de coordenades transformar-se en una altra conformement plana i, per tant, en ella el tensor de *Weyl* s'anul·la tant al *Big Bang* com al *Big Crunch*.

5-En el moviment d'un cos al si d'un camp gravitatori poden aparèixer els dos efectes següents:

a) El seu volum variarà per causa del tensor de *Ricci*.

b) El cos es distorsionarà sense, però, variar el seu volum a través del tensor de *Weyl*. Aquest darrer efecte, per analogia amb les marees terrestres, s'anomena *efecte de marea.*

A la singularitat d'un forat negre el tensor de *Weyl* tendeix a infinit i això es manifestarà, doncs, amb un efecte de marea també infinit en els cossos que es dirigeixin cap a ella.

Si la mètrica de *Robertson-Walker* fos general, l'entropia creixeria en l'expansió i tornaria a disminuir en la contracció... i tot tornaria a ser igual amb la història anul·lada. L'opinió inicial de *Hawking* en el sentit d'identificar el *Big Bang* i el *Big Crunch* ha estat posteriorment abandonada per ell: seguint el penediment anterior d'*Einstein* sobre la constant cosmològica, va reconèixer que la seva opinió "havia estat l'error més gran de la seva vida".

Si *Penrose* està en el bon camí en interpretar el *Big Crunch* com un superforat negre, la mètrica de *Robertson-Walker* ja no seria general i en el *Big Crunch* el tensor de Weyl es faria infinit, mentre que al *Big Bang* aquest seria nul, amb la qual cosa l'entropia seria sempre creixent i la història tindria un sentit. Això faria que el *Big Bang* no es pogués identificar amb un forat blanc amb un tensor de *Weyl* infinit.