

# CAMPS QUÀNTICS 8

## L'ESPAI DE FOCK

Sigui un conjunt d'operadors  $a_r, a_r^+$  que verifiquin

$$[N_r, a_s] = -\delta_{rs} a_s \quad [N_r, a_s^+] = \delta_{rs} a_s^+ \quad \text{amb } N_r = a_r^+ a_r$$

És fàcil comprovar que, si  $\bar{\varphi}$  és un estat propi de  $N_r$  amb valor propi  $n_r$ , aleshores  $a_r^+ \bar{\varphi}$  és un estat propi de  $N_r$  amb valor propi  $n_r+1$  i  $a_r \bar{\varphi}$  ho és amb valor propi  $n_r-1$ .

Per tant, podem definir els estats  $|b_r, c_s, \dots\rangle$  constitutius de l'espai de Fock amb  $b$  partícules a l'estat  $r$ ,  $c$  a l'estat  $s, \dots$  etc.

Seguint les passes que vàrem avançar en el nostre estudi del capítol 7 sobre l'oscil·lador harmònic, podem fer aquestes interpretacions:

$N_r$  és l'operador que ens dóna *el nombre de partícules* a l'estat  $r$ .

L'operador  $a_r^+$  és el *creador* de partícules, que actua sobre un vector de l'estat de Fock i el transforma en un altre amb una partícula més a l'estat  $r$ .

L'operador  $a_r$  és el *destructor* de partícules a l'estat  $r$ .

Definim l'estat buit  $|0\rangle \neq 0$  com aquell en què  $a_r|0\rangle = 0, \forall r$ .

A partir de  $|0\rangle$  podem definir tots els estats; així, per exemple,  $|1_r, 2_s, 0, 0, \dots\rangle = k \cdot a_r^+ a_s^+ a_s^+ |0\rangle$ , on  $k$  és un factor introduït per normalitzar l'estat (l'estat buit se suposa normalitzat i  $\langle 0|0\rangle = 1$ ).

Les relacions anteriors poden resultar com a conseqüència *alternativament* de les dues hipòtesis següents:

$$\begin{aligned}
 a) \quad [a_r, a_s^+] &= \delta_{rs} & [a_r, a_s] &= [a_r^+, a_s^+] = 0 \\
 b) \quad [a_r, a_s^+]_{\pm} &= \delta_{rs} & [a_r, a_s]_{\pm} &= [a_r^+, a_s^+]_{\pm} = 0
 \end{aligned}$$

, on  $[A, B]_{\pm} = AB \pm BA$  és l'anticommutador dels operadors  $A$  i  $B$ .

En el primer cas els valors propis de  $N_r$  són  $0, 1, 2, 3, \dots$  i les partícules s'anomenen *bosons*. A cada estat podem tenir tantes partícules idèntiques com vulguem. Els bosons segueixen l'estadística termodinàmica de *Bose-Einstein*. La *superfluïdesa del He<sub>4</sub>*, la *superconductivitat*, els *condensats de Bose-Einstein* i el feix *làser* format per superposició de fotons coherents són una conseqüència del seu caràcter bosònic.

En el segon cas els valors propis de  $N_r$  són  $0$  o  $1$  i les partícules s'anomenen *fermions*. El resultat anterior constitueix el principi d'*exclusió de Pauli*: en un conjunt de fermions cada estat particular només pot estar ocupat per una partícula. Els fermions segueixen l'estadística termodinàmica de *Fermi-Dirac*. Els nivells energètics atòmics i els estels de neutrons s'expliquen pel caràcter fermiònic dels electrons i neutrons, respectivament.

Si tenim un sistema de partícules definit per una funció d'ona de totes les seves coordenades espacials i espinorials i intercanviem dues partícules idèntiques, la funció d'ona variarà així:

-> Intercanvi de bosons: les relacions de commutació per als operadors de creació-destrucció impliquen que la funció d'ona romangui constant.

-> Intercanvi de fermions: les relacions d'anticommutació dels operadors de creació-destrucció impliquen que la funció d'ona canviï de signe.

En ambdós casos veiem la invariància de  $|\varphi(x)|^2$  degut a la *indistingibilitat* de partícules idèntiques, com a conseqüència del principi d'incertesa; en efecte: suposant que coneguéssim amb exactitud les posicions de totes les partícules, la dispersió infinita de les seves velocitats no en permetria la identificació posterior.

## LA SEGONA QUANTIFICACIÓ

Fins ara hem trobat tres equacions "acceptables" per a la relativitat (prescindint de les equacions de camp de la relativitat ge-

neral): les equacions clàssiques de *Maxwell* i les equacions quàntiques de *Klein-Gordon* i de *Dirac*.

Les equacions de *Maxwell* ens donen l'evolució d'un camp. Les altres dues permeten trobar l'evolució d'una funció d'ona que *matemàticament* també és un camp. No podria ocórrer que les dues equacions quàntiques es poguessin obtenir a partir d'una densitat lagrangiana mitjançant un principi extremal i coincidir amb les equacions d'*Euler-Lagrange* que vàrem trobar al capítol 4? La resposta és afirmativa.

Un cop que tenim la densitat lagrangiana, la podem reinterpretar com a un operador on figuren els camps que també esdevindran operadors. En realitat pensem que la física quàntica convencional sorgeix de la mateixa manera: d'una lagrangiana clàssica deduïm la seva hamiltoniana (ara tenim un sistema inicial amb un nombre finit de graus de llibertat) i a continuació reinterpretem la hamiltoniana com a operador que actua sobre els estats (funcions d'ona generalment). A l'operador hamiltonià les coordenades i impulsos són ara també operadors que actuen de "certa" manera sobre els estats i verifiquen relacions de commutació deduïdes per correspondència. L'operador hamiltonià ens dona l'evolució del sistema.

De manera anàloga, nosaltres haurem de tenir en compte els punts següents:

-> Com actuen els operadors en què s'han convertit tots els camps?

-> Sobre què actuen o, dit d'una altra manera, quins són els estats?

-> Quines relacions podem trobar per correspondència entre els camps considerats com a operadors?

-> Com afecta l'operador hamiltonià l'evolució?

Tenint en compte que les equacions de *Klein-Gordon* i de *Dirac* són equacions quàntiques que donen lloc a una segona interpretació quàntica, hom parla d'una *segona quantificació*. Aquest nom sembla bastant desafortunat ja que nosaltres l'apliquem també al camp electromagnètic clàssic. Per tradició, tanmateix, el continuarem emprant.

El que realment importa és que tenim tres densitats lagrangianes, a les quals hem arribat per camins tortuosos, però hi hem arribat. Aquest és el veritable valor de les equacions de *Klein-Gordon* i de *Dirac* que ens han conduït a unes densitats lagrangianes concretes.

Als apartats següents parlarem de tot l'anterior amb escreix. Veurem que els nous operadors camp (*camp quàntics*) es podran expressar en funció d'operadors de creació i de destrucció. Tots els operadors actuaran sobre un espai de *Fock* i això ens permetrà l'estudi de les interaccions.

## INVARIÀNCIES DE LA DENSITAT $\mathcal{L}$

La invariància de  $\mathcal{L}$  sota determinades transformacions porta, d'acord amb el teorema de *Noether*, a constants clàssiques de moviment, com ja sabem. Cada constant de moviment serà funció dels camps i dels moments generalitzats i amb la segona quantificació s'interpretarà com a un operador.

Vegem molt ràpidament les quantitats de moviment que ens apareixeran en un formulisme clàssic i que més tard esdevindran operadors quàntics.

1-Invariància de  $\mathcal{L}$  per translacions espaciotemporals.

Hom troba el tensor energia-impuls  $T^{\alpha\beta}$  que verifica

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = 0$$

, amb la qual cosa es conserva el quadrivector *energia-impuls*  $P^\alpha$  obtingut per integració de les  $T^{\alpha\alpha}$  (vegeu el capítol 4).

2-Invariància de  $\mathcal{L}$  per rotacions de Lorentz.

Arribem a la invariància del tensor antisimètric

$$M_{\alpha\beta} = \left\{ \int \{x_\alpha dP_\beta - x_\beta dP_\alpha\} \right\} + \{S_{\alpha\beta}\}$$

El primer terme ens conduirà a la definició *del moment orbital* i el segon a la de l'*espín*, ambdós *tridimensionals*. El terme  $S_{\alpha\beta}$  apareix quan afegim als camps la transformació, induïda mitjançant una representació de les rotacions de *Lorentz*, sobre els diferents

components sense afectar-ne, però, les coordenades. En el procés de segona quantificació  $S_{\alpha\beta}$  permetrà definir l'operador espín que, a través dels operadors de creació i de destrucció que inclouen els camps, actuarà com a observable sobre els estats, generats formalment per l'actuació dels operadors de creació sobre  $|0\rangle$ .

De manera similar, podem obtenir altres propietats assignades a determinats operadors a través del procés de segona quantificació.

### 3-Invariància de fase a $\mathcal{L}$ .

Si la densitat lagrangiana és invariant pel canvi dels camps davant de transformacions que depenguin de paràmetres que siguin constants i arbitraris, com en el cas

$$\Phi_r \rightarrow \Phi_r \cdot \exp(i\varepsilon) \quad \Phi_r^+ \rightarrow \Phi_r^+ \cdot \exp(-i\varepsilon)$$

, trobem una funció  $s^\alpha$  dels camps i dels impulsos generalitzats que verifica

$$\frac{\partial s^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$$

, amb la qual cosa, aplicant el teorema de *Gauss* a tot l'espai i anul·lant els camps a l'infinit, trobem per *integració* la constant de moviment

$$Q = \int s^0 \cdot dV$$

$Q$  s'anomena càrrega i podem definir una *densitat de corrent tridimensional*

$$\vec{j} = (s^1, s^2, s^3)$$

Cal insistir que les definicions anteriors no tenen res a veure a priori amb els conceptes elèctrics homònims. A la segona quantificació  $Q$  i  $s^\alpha$  correspondran als operadors *càrrega* i *densitat de corrent quadridimensional* o *densitat de corrent conservat*.

La transformació anterior s'anomena de *fase* o *gauge global* en raó que  $\varepsilon$  és una constant independent del punt. Si  $\varepsilon$  fos una funció  $\varepsilon(x)$ , la transformació s'anomenaria *gauge local* o *simplement gauge*. Veurem més endavant que, *si estenem la invariància gauge global de  $\mathcal{L}$  a una invariància gauge local, caldrà introduir un terme a  $\mathcal{L}$  que resultarà ser una interacció*.

La paraula anglesa *gauge* correspon als termes *escala, aforament, calibrat i galga*. Tots els qualificatius anteriors, inclòs l'anglès, són inadequats i fruit d'una llarga història en què Weyl introduí el terme per a certes invariàncies i on aquell més tard es va generalitzar per a altres que no hi tenien res a veure.

Vegem finalment unes implicacions de les constants de moviment clàssiques al procés de segona quantificació. Si una hamiltoniana clàssica és invariant sota una transformació, tindrem una constant de moviment i a aquesta constant correspondrà en el procés de segona quantificació un operador  $T$ , que suposarem que és hermític.  $U = \exp(i\alpha T)$  serà un operador unitari que podrà definir una transformació. Les transformacions donen lloc, com ja sabem, a descripcions equivalents de l'evolució dels sistemes quàntics (vegeu l'apèndix 2).

En el supòsit que  $U$  no depengui explícitament del temps i que tant  $|\varphi\rangle$  com  $|U\varphi\rangle$  siguin solucions evolutives determinades pel hamiltonià original, tindrem que  $H = UHU^{-1} \rightarrow [U, H] = 0$ , d'acord amb el raonament següent:

$$i\hbar \frac{\partial |\varphi\rangle}{\partial t} = H|\varphi\rangle \rightarrow i\hbar \frac{\partial U|\varphi\rangle}{\partial t} = UH|\varphi\rangle \rightarrow i\hbar \frac{\partial |U\varphi\rangle}{\partial t} = UHU^{-1}U|\varphi\rangle$$

i, en conseqüència,  $H = UHU^{-1} \rightarrow [U, H] = 0$ . Mitjançant una transformació infinitesimal  $U \cong 1 + iT\delta\alpha$ ,  $U^{-1} \cong 1 - iT\delta\alpha$  i una aproximació de primer ordre obtindrem  $[T, H] = 0$  i l'operador  $T$  esdevindrà una constant quàntica de moviment.

Resumint, podem dir que, si es compleixen les condicions adients amb  $[U, H] = 0$ , davant d'una constant de moviment clàssica podem obtenir per correspondència l'operador quàntic  $T$  que sigui també constant de moviment. Si l'anterior no ocorre i una constant de moviment clàssica no esdevé una constant de moviment quàntica, tenim una *anomalia*.

## EL CAMP REAL DE KLEIN-GORDON

L'equació de *Klein-Gordon* és del tot equivalent a l'equació d'*Euler-Lagrange* deduïda de la densitat lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\Phi_{,\alpha}\Phi^{,\alpha} - \mu^2\Phi^2)$$

Sabem que els camps i impulsos clàssics generalitzats verifiquen les relacions

$$\{\Phi_r(\vec{x}, t), \pi_s(\vec{x}', t)\} = \delta_{rs} \cdot \delta_3(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$\{\Phi_r(\vec{x}, t), \Phi_s(\vec{x}', t)\} = \{\pi_r(\vec{x}, t), \pi_s(\vec{x}', t)\} = 0$$

Aquests camps seran operadors al procés de segona quantificació i mitjançant el principi de correspondència

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [A, B]$$

verificaran les relacions de commutació

$$[\Phi_r(\vec{x}, t), \pi_s(\vec{x}', t)] = i\hbar \cdot \delta_{rs} \cdot \delta_3(\vec{x} - \vec{x}')$$

$$[\Phi_r(\vec{x}, t), \Phi_s(\vec{x}', t)] = [\pi_r(\vec{x}, t), \pi_s(\vec{x}', t)] = 0$$

Si operem dins d'un volum  $V$  finit i imposem condicions adients de contorn a les parets del cub amb  $V=L^3$ , obtindrem la solució més general de l'equació de *Klein-Gordon*, a través del principi de superposició, que resulta ser

$$\Phi(x) = \sum_{\vec{k}} C_{\vec{k}} (a(\vec{k}) \cdot \exp(-ik^\alpha x_\alpha) + a^+(\vec{k}) \cdot \exp(ik^\alpha x_\alpha))$$

Si elegim les constants  $C_{\vec{k}}$  adequadament, arribem a les relacions de commutació

$$[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \quad [a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [a^+(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] = 0$$

D'aquí podem fer aquestes interpretacions:

->  $a^+(\vec{k})$  és l'operador que crea una partícula corresponent al valor  $\vec{k}$ .

->  $a(\vec{k})$  és l'operador que destrueix una partícula corresponent al valor  $\vec{k}$ .

->  $N(\vec{k}) = a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})$  és l'operador *nombre de partícules* que correspon a  $\vec{k}$ .

Si col·loquem els operadors en l'*ordre normal* amb els operadors de creació a l'esquerra i els de destrucció a la dreta, per evitar divergències, i substituïm  $\Phi(x)$  per la solució anterior, obtenim per *integració* els operadors ( $Q=0$ )

$$H = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} N(\vec{k})$$

$$\vec{P} = \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k}) = \sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} N(\vec{k})$$

Tots els operadors actuen sobre l'espai de *Fock* conegut.

L'expressió de  $\Phi(x)$  és la del camp quàntic de *Klein-Gordon real*, el significat del qual *només se'ns farà palès a l'estudi de les interaccions*. Pel moment ens és suficient saber que aquest camp es pot escriure en funció d'*expressions exponencials i d'operadors de creació-destrucció* i que actua sobre els estats d'un espai de *Fock*  $|n_1, m_2, \dots\rangle$  amb  $n$  partícules a l'estat 1,  $m$  a l'estat 2, etc.

Si calculem  $H$  a partir de la densitat hamiltoniana, es *comprova* que l'equació evolutiva del camp quàntic en la imatge de *Heisenberg*,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\Phi, H]$$

, coincideix amb l'equació de *Klein-Gordon*, amb la qual cosa l'evolució dels camps quàntics en la imatge de *Heisenberg* seguirà la mateixa llei que els camps clàssics de l'equació de *Klein-Gordon* que *abans hem donat* (pensem que amb el procés de segona quantificació les equacions de *Klein-Gordon* i *Dirac*, com les de *Maxwell*, són equacions de camps clàssics que es quantifiquen posteriorment i això ens indica que quan obtenim els camps quàntics tenim en realitat una *primera quantificació*).

Quan estudiem les interaccions utilitzarem la imatge de *Tomonaga*:

a) *El hamiltonià de la interacció evolucionarà*, pel que acabem de dir, *substituint els camps quàntics que figuren en ell per les expressions escrites abans*.



b) L'anterior hamiltonià interactiu, amb la incorporació de les funcions exponencials i els operadors de creació-destrucció de què hem parlat, farà evolucionar els estats.

*Aquesta important conclusió serà extensiva a l'estudi de les interaccions que trobem d'ara endavant.*

## EL CAMP COMPLEX DE KLEIN-GORDON

Amb un camp complex la densitat lagrangiana serà

$$\mathcal{L} = \Phi_{,\alpha}^+ \Phi'^{\alpha} - \mu^2 \Phi^+ \Phi$$

Tractant  $\Phi, \Phi^+$  com a camps independents, trobem les equacions d'*Euler-Lagrange*

$$\left[ \square + \mu^2 \right] \Phi = 0 \quad \left[ \square + \mu^2 \right] \Phi^+ = 0$$

A partir de les solucions generals dels camps  $\Phi, \Phi^+$

$$\Phi(x) = \sum_{\vec{k}} C_{\vec{k}} (a(\vec{k}) \exp(-ik^a x_a) + b^+(\vec{k}) \exp(ik^a x_a))$$

$$\Phi^+(x) = \sum_{\vec{k}} C_{\vec{k}} (b(\vec{k}) \exp(-ik^a x_a) + a^+(\vec{k}) \exp(ik^a x_a))$$

i aplicant el principi de correspondència als parèntesis de *Poisson* dels dos camps, obtenim, de manera anàloga al camp real de *Klein-Gordon*,

$$[a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), b^+(\vec{k}')] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'},$$

, amb tots els altres commutadors nuls.

Si definim  $N_a(k) = a^+(k)a(k)$ ,  $N_b(k) = b^+(k)b(k)$ , obtenim per *integració* els operadors següents (recordem que  $Q$  apareix a través de la integració corresponent quan hi ha una invariància gauge global):

$$P^\alpha = \sum_{\vec{k}} \hbar k^\alpha (N_a(\vec{k}) + N_b(\vec{k}))$$

$$Q = q \cdot \sum_{\vec{k}} (N_a(\vec{k}) - N_b(\vec{k}))$$

Finalment, podem fer aquesta interpretació:

->  $a^+(\vec{k})$  ( $a(\vec{k})$ ) crea (destrueix) una *partícula* amb vector d'ona  $\vec{k}$  i càrrega elèctrica  $q$ .

->  $b^+(\vec{k})$  ( $b(\vec{k})$ ) crea (destrueix) una *antipartícula* amb vector d'ona  $\vec{k}$  i càrrega elèctrica  $-q$ .

El camp de *Klein-Gordon* complex actua sobre els vectors de l'espai de *Fock* amb partícules i antipartícules amb càrrega elèctrica oposada, mentre que el camp real ho feia sobre partícules sense càrrega. En ambdós casos, però, tenim entitats amb espín zero en no aparèixer cap canvi addicional dels camps a través d'una representació per preservar la invariància per les rotacions. L'anterior només sorgeix quan tenim espinors que puguin canviar els components sense modificar les coordenades, com a l'equació de *Dirac*.

Per acabar, a l'estudi anterior veiem que les antipartícules apareixen de forma *més espontània que no pas en altres interpretacions*, com la corresponent al mar de *Dirac*.

## EL CAMP DE DIRAC

L'equació de *Dirac* s'obté a partir de les equacions d'*Euler-Lagrange* deduïdes de la densitat lagrangiana

$$\mathcal{L} = c\bar{\Psi}(x) \left[ i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc \right] \Psi(x)$$

, on hem considerat els components de  $\Psi$  i  $\bar{\Psi}$  com a camps diferents i hem definit  $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ ,  $\Psi^\dagger = \bar{\Psi}^*$ .

Les solucions més generals, a través dels espinors de *Dirac*  $u_r$ ,  $v_r$ , són aquestes:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \sum_{r,\vec{p}} C_{\vec{p}}(c_r(\vec{p})u_r(\vec{p})\exp(-ip^\alpha x_\alpha / \hbar) + \\ &\quad + d_r^+(\vec{p})v_r(\vec{p})\exp(ip^\alpha x_\alpha / \hbar)) \\ \bar{\Psi}(x) &= \sum_{r,\vec{p}} C_{\vec{p}}(d_r(\vec{p})\bar{v}_r(\vec{p})\exp(-ip^\alpha x_\alpha / \hbar) + \\ &\quad + c_r^+(\vec{p})\bar{u}_r(\vec{p})\exp(ip^\alpha x_\alpha / \hbar)) \end{aligned}$$

Com podem passar dels camps clàssics als operadors corresponents?

Si establíssim la correspondència  $\{A, B\} \rightarrow (1 / i\hbar) [A, B]$ , ens trobaríem que l'energia obtinguda no seria definida positiva i l'estadística dels electrons correspondria a la de *Bose-Einstein*.

Ambdues coses són inadmissibles. Per altra banda, si volem que ens aparegui l'estructura d'operadors de creació-destrucció, sabem que podem emprar alternativament anticommutadors. Així l'estadística corresponent seria la de *Fermi-Dirac*, que és la que verifiquen els electrons. Provem, doncs, d'establir la correspondència

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [A, B]_{\pm}$$

i veure si les conclusions són acceptables.

Finalment, resulten les propietats següents:

$$[c_r(\vec{p}), c_r^+(\vec{p}')]_{\pm} = [d_r(\vec{p}), d_r^+(\vec{p}')]_{\pm} = \delta_{rs} \cdot \delta_{\vec{p}\vec{p}'}$$

, amb tots els altres anticommutadors nuls.

Quan estudiàvem el camp de *Klein-Gordon* dèiem que, per evitar les divergències, en totes les expressions on apareguessin operadors de creació-destrucció empraríem l'ordre normal col·locant els operadors de creació a l'esquerra i els de destrucció a la dreta. És evident que això equival a dir "com si es complissin relacions de commutació". Amb el camp de *Dirac* farem el mateix, però dient "com si es complissin relacions d'anticommutació" (si, per exemple, tenim en una expressió  $a_r(\vec{p})b_r^+(\vec{p})$ , la substituïrem per  $-b_r^+(\vec{p})a_r(\vec{p})$ ). Aquí ja podem veure que per evitar les divergències ens veiem obligats a fer determinats processos només justificables a posteriori, la qual cosa ens diu que la nova teoria està encara molt allunyada del que seria desitjable des d'un punt de vista estètic i racional rigorós.

Definint  $N_r(\vec{p}) = c_r^+(\vec{p})c_r(\vec{p})$ ,  $\bar{N}_r(\vec{p}) = d_r^+(\vec{p})d_r(\vec{p})$  obtenim per integració els operadors

$$H = \sum_{r, \vec{p}} E_{\vec{p}} (N_r(\vec{p}) + \bar{N}_r(\vec{p})) \quad \bar{p} = \sum_{r, \vec{p}} \vec{p} (N_r(\vec{p}) + \bar{N}_r(\vec{p}))$$

$$Q = e \cdot \sum_{r, \vec{p}} (N_r(\vec{p}) - \bar{N}_r(\vec{p}))$$

Recordem novament que l'operador càrrega elèctrica s'obté per *integració* a partir de l'operador *densitat de corrent de càrrega*

$$s^\alpha = c.e. \bar{\Psi}(x) \gamma^\alpha \Psi(x)$$

, que hem trobat a través de la invariància gauge global vista amb anterioritat (vegeu l'apartat sobre la invariància de  $\mathcal{L}$ ).

Per covariància de l'equació de *Dirac* davant de les rotacions deduïm la llei induïda de transformació dels camps a través de la representació corresponent i d'aquí l'operador *espín*, trobat a partir dels  $S_{\alpha\beta}$  (vegeu el mateix apartat anterior), que correspon a  $s=1/2$  en l'actuació sobre estats amb una sola partícula. Coneixent l'operador espín

$$\bar{S} = \frac{\hbar}{2} \int_V N(\Psi^+(x) \cdot \vec{\sigma} \cdot \Psi(x)) \cdot dV$$

trobem l'operador *helicitat*, que dona la projecció de l'espín sobre la direcció de l'impuls:

$$S_p = \frac{\hbar}{2} \int_V N(\Psi^+(x) \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \Psi(x)) \cdot dV$$

, on les expressions subintegrals s'escriuen en l'*ordre normal*  $N()$ .

D'aquí es verifiquen les propietats següents:

$$S_p c_r^+(\vec{p})|0\rangle = (-1)^{r+1} \frac{\hbar}{2} c_r^+(\vec{p})|0\rangle$$

$$S_p d_r^+(\vec{p})|0\rangle = (-1)^{r+1} \frac{\hbar}{2} d_r^+(\vec{p})|0\rangle$$

Resumint tot l'anterior, podem afirmar que

->  $c_r^+(\vec{p})$  ( $c_r(\vec{p})$ ) crea (destrueix) un electró amb impuls  $\vec{p}$ , espín  $(1/2) \cdot \hbar$  i helicitat  $(-1)^{r+1} \cdot \hbar / 2$ ,

->  $d_r^+(\vec{p})$  ( $d_r(\vec{p})$ ) crea (destrueix) un positró amb impuls  $\vec{p}$ , espín  $(1/2) \cdot \hbar$  i helicitat  $(-1)^{r+1} \cdot \hbar / 2$ .

Hem vist que el camp de *Klein-Gordon* actua sobre estats que representen conjunts de bosons i que el camp de *Dirac* ho fa sobre fermions. Hi ha alguna relació entre l'espín i l'estadística seguida per les partícules? A l'apartat següent veurem com la resposta a aquesta pregunta és afirmativa.

## RELACIÓ ESPÍN-ESTADÍSTICA

L'elecció d'anticommutadors en el camp de Dirac és totalment arbitrària des d'un punt de vista formal. No podríem trobar un principi comú que obligués a l'elecció de commutadors per als casos d'espín zero i d'anticommutadors quan l'espín fos  $1/2$ ?

Aquest principi existeix. Si tenim dos observables  $T_1$  i  $T_2$  que depenen del punt de l'espai de Minkowski, hauran de verificar necessàriament  $[T_1(x), T_2(y)] = 0$ , si  $(x-y)^2 < 0$ , ja que les variables representades per ells corresponents a punts amb una separació espacial han de ser compatibles degut a la no-influència i a la localitat o separabilitat que en resulten? Les reflexions que nosaltres hem fet sobre la no-localitat o no-separabilitat semblen afirmar el contrari. Al capítol 7 mai parlàvem, però, de creació o destrucció de partícules, sinó de la influència no local sobre partícules ja existents. El principi de microcausalitat ens diu que, si els observables  $T_1$  i  $T_2$  contenen operadors de creació i de destrucció i es compleixen condicions determinades, podem afirmar la conseqüència anterior.

Es demostra que, acceptat el principi de microcausalitat amb les condicions esmentades, els camps quàntics que defineixen els diferents operadors que hem anat veient abans han de verificar  $[\Phi(x), \Phi(y)] = 0$  o  $[\Phi(x), \Phi(y)]_+ = 0$ , si es compleix  $(x-y)^2 < 0$ . Si tinguéssim un camp amb espín zero, per exemple, utilitzant anticommutadors es demostraria que no es compliria cap de les dues condicions, mentre que si empréssim commutadors es compliria la primera de les dues condicions, la qual cosa preservaria la microcausalitat. Anàlogament arribaríem a la conclusió que amb partícules d'espín  $1/2$  hauríem de treballar amb anticommutadors per preservar la microcausalitat.

Resumint l'anterior podem concloure així:

1-Volem que el mecanisme de segona quantificació ens dugui a l'espai de Fock convencional amb el conjunt d'operadors de creació i destrucció, etc.

2-L'anterior implica que haurem d'arribar a determinades relacions de commutació o anticommutació entre els operadors que esdevindran de creació/destrucció.

3-Per preservar la microcausalitat haurem de treballar per a partícules d'espín enter amb commutadors i per a partícules d'espín semienter amb anticommutadors.

4-Com a conseqüència de la microcausalitat, les partícules amb espín enter seran bosons i les que tinguin espín semienter seran fermions.

## EL CAMP DE MAXWELL

Al procés de segona quantificació (aquí no hi ha dubte de la incorrecció del qualificatiu en ésser el camp de *Maxwell* original clarament clàssic) apareixen problemes derivats del fet que la massa del fotó és nul·la. Més endavant veurem que el camp gravitatori a hores d'ara no s'ha quantificat satisfactòriament degut que la massa del gravitó també és nul·la amb l'afegit dels problemes derivats del seu espín  $s=2$  i de la no-linealitat de les equacions del camp gravitatori (tot l'anterior origina seriosos dubtes sobre el que cal quantificar al camp gravitatori).

Anem ara a seguir el camí de quantificació del camp de *Maxwell*, amb totes les dificultats que comporta, i la seva solució final.

Les equacions de *Maxwell* en el sistema d'unitats de *Heaviside* són

$$(1) F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0 \quad (2) F_{,\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} s^\alpha$$

, on  $s^\alpha = (c\mu, \vec{j})$  és el quadrivector corrent amb  $\mu$  la densitat de càrrega elèctrica i  $\vec{j}$  la densitat de corrent tridimensional.

A partir de la relació  $F^{\mu\nu} = A^{\mu,\nu} - A^{\nu,\mu}$  les equacions (1) es satisfan automàticament i les (2) esdevenen

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = \frac{1}{c} s^\mu$$

Tot l'anterior pot derivar-se de la densitat lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} A^\mu s_\mu$$

, si tractem els components  $A^\alpha$  com a camps independents en el principi d'acció extremal.

Les equacions del camp són invariants davant de la transformació gauge

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu f(x)$$

, on  $f(x)$  és una funció arbitrària del punt de l'espai de *Minkowski*.

L'impuls generalitzat  $\pi^0 \equiv 0$  i això ens impedeix establir les relacions de commutació de la segona quantificació.

Si canviem la densitat lagrangiana per

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\nu A_\mu(x))(\partial^\nu A^\mu(x)) - \frac{1}{c} s_\mu(x) A^\mu(x)$$

, podem realitzar la segona quantificació correctament.

Amb la nova densitat arribem, però, a unes altres equacions del camp

$$\square A^\mu(x) = \frac{1}{c} s^\mu(x)$$

, que seran equivalents a les primitives, si es verifica

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0$$

, que no és altra cosa que el gauge particular de *Lorentz* (vegeu el capítol 5).

Considerant ara  $s^\mu(x) = 0$ , les equacions del camp lliure seran

$$\square A^\mu(x) = 0$$

Aquestes equacions són per a cada component un cas particular de l'equació real de *Klein-Gordon* amb  $m=0$ . Les solucions més generals seran del tipus

$$A^\mu = \sum_{r,k} C_{\vec{k}} \varepsilon_r^\mu(\vec{k}) \left[ a_r(\vec{k}) \exp(-ik^\alpha x_\alpha) + a_r^\dagger(\vec{k}) \exp(ik^\alpha x_\alpha) \right]$$

Els quatre vectors de components  $\varepsilon_r^\mu(\vec{k})$ , amb  $r=0,1,2,3$ , són la base vectorial en què expressem els  $A^\mu$ .

Elegirem aquesta base vectorial així:

a)  $\varepsilon_0(\vec{k}) = (1,0,0,0)$  és la *polarització escalar*,

b)  $\varepsilon_r(\vec{k}) = (0, \bar{\varepsilon}_r(\vec{k}))$ ,  $r = 1,2,3$

->  $\varepsilon_3(\vec{k}) = \vec{k}/|\vec{k}|$  és la *polarització longitudinal*.

->  $\vec{k} \cdot \bar{\varepsilon}_r(\vec{k}) = 0$ ,  $\bar{\varepsilon}_r(\vec{k}) \cdot \bar{\varepsilon}_s(\vec{k}) = \delta_{rs}$ ;  $r, s = 1,2$ . Les  $\bar{\varepsilon}_r(\vec{k})$  són les dues *polaritzacions transversals*.

Si apliquem les relacions de commutació per correspondència obtenim

$$\begin{aligned} [a_r(\vec{k}), a_s^+(\vec{k}')] &= \alpha_r \cdot \delta_{rs} \cdot \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \\ [a_r(\vec{k}), a_s(\vec{k}')] &= [a_r^+(\vec{k}), a_s^+(\vec{k}')] = 0 \end{aligned}$$

$\alpha_r$  val 1, si  $r=1,2,3$ , i -1, si  $r=0$ . A partir de la interpretació de *Gupta-Breuler*, eliminem la conflictitat del valor de  $\alpha_0 = -1$  per als fotons escalars, com podem veure a continuació.

Si apliquéssim la condició subsidiària

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0$$

, trobaríem una incompatibilitat amb les relacions de commutació. Com que nosaltres només volem que el límit clàssic de la teoria sigui correcte, serà suficient imposar la condició subsidiària més feble següent

$$\langle \Psi | \partial_\mu A^\mu(x) | \Psi \rangle = 0$$

, que anul·la únicament el valor mitjà o esperat de l'anterior quantitat, sense afirmar res dels valors concrets.

Si definim l'operador *nombre de partícules*

$$N_r(\vec{k}) = \alpha_r a_r^+(\vec{k}) a_r(\vec{k})$$

i utilitzem l'*ordre normal* del camp de *Klein-Gordon*, obtenim una representació de *Fock* adient i sense contradiccions. Els operadors de creació-destrucció donaran lloc a l'aparició o desaparició de fotons corresponents a  $\vec{k}$  i amb la polarització que correspongui.

Així, per exemple, obtindrem per integració ( $Q=0$ )

$$H = \sum_{r\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} N_r(\vec{k})$$

Amb la condició subsidiària anterior els valors mitjans o esperats dels observables, però, només depenen dels fotons transversals. La contribució mitjana dels fotons escalars i longitudinals es cancel·la. En conseqüència, *els fotons escalars i longitudinals no seran observats, però hi seran presents i, per tant, intervinen a la part no observada de les interaccions a través del propagador*, de què parlarem més endavant.



Si calculéssim l'espín d'un fotó (no repetim ara el procés per arribar-hi), veuríem que  $s=1$  (es tracta d'un bosó). Les possibles helicitats són només dues, les corresponents a  $s=1$  i  $-1$ , i la projecció deguda a  $s=0$  s'ha perduda, en part a causa de la condició subsidiària que limita també les polaritzacions observades.

Tot el procés de quantificació del camp de *Maxwell* és molt enriquidor, perquè ens fa veure que la segona quantificació no sorgeix espontàniament, sinó a través d'un llarg camí de proves i desenganxos. Aquestes giragonses no han conduït encara a la quantificació del camp gravitatori, com ja hem dit.

## INTERACCIONS: ELS CAMPS GAUGE

L'equació de *Dirac*, quan hi ha un camp electromagnètic, sabem que és

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\Psi(x) = \frac{e}{c}\gamma^\mu A_\mu(x)\Psi(x)$$

Aquesta equació pot derivar-se a partir de la densitat lagrangiana  $\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_I$ , on  $\mathcal{L}_0$  és la densitat lagrangiana de la partícula lliure i  $\mathcal{L}_I$  n'és la corresponent a la *interacció*:

$$\mathcal{L}_I = -e\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)A_\mu(x)$$

La densitat lagrangiana del sistema complet, incloent-hi els fotons, valdrà  $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{0D}+\mathcal{L}_{0M}+\mathcal{L}_I$ , on els dos primers termes són les densitats lagrangianes dels camps lliures de *Dirac* i *Maxwell* i el tercer la de la interacció. Aquesta darrera es pot expressar així:

$$\mathcal{L}_I = -\frac{1}{c}s^\mu(x)A_\mu(x)$$

, on  $s^\mu$  és la densitat de corrent tetradimensional del camp de *Dirac*. La densitat lagrangiana d'interacció acobla, doncs, la densitat de corrent elèctric i el camp electromagnètic.

Nosaltres podríem trobar la densitat lagrangiana d'interacció mitjançant el raonament alternatiu següent:

1-Tenim la densitat lagrangiana lliure de *Dirac*.

2-Aquesta densitat  $\mathcal{L}_{0D}$  és invariant davant de les transformacions gauge globals del grup  $U(1)$  (vegeu l'apèndix 3)

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi(x) \exp(i e \alpha / \hbar c)$$

, però no davant de les transformacions gauge locals on en lloc de  $\alpha$  hi figuri el terme  $\alpha(x)$ .

3-A continuació fem la *substitució mínima*

$$i\hbar\partial_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu - \frac{e}{c}A_\mu(x)$$

, on els camps gauge introduïts es transformen d'acord amb la transformació gauge coneguda

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x)$$

, i afegim la densitat  $\mathcal{L}_{0M}$  lliure de *Maxwell*.

4-La nova densitat lagrangiana  $\mathcal{L}=\mathcal{L}_{0D}+\mathcal{L}_{0M}+\mathcal{L}_I$  és invariant per les transformacions gauge locals i la densitat lagrangiana d'interacció acobla la densitat de corrent conservat del camp de *Dirac* amb el camp gauge.

Podem concloure el que hem dit amb aquest resum:

*Si tenim una densitat lagrangiana corresponent a un camp quàntic lliure amb una invariància gauge global, podem fer que aquesta esdevingui local amb la introducció de camps gauge per la substitució mínima i l'addició de la seva densitat lagrangiana lliure. La densitat lagrangiana d'interacció que hem introduït acobla la densitat de corrent del camp inicial amb els camps gauge. La transformació gauge és diferent per als camps inicials i els camps gauge introduïts.*

La interacció electromagnètica ha estat desenvolupada per *Feynman-Tomonaga-Schwinger* ("QED Quantum Electrodynamics" o *EDQ Electrodinàmica quàntica*) i ens servirà com a model per a l'estudi de les altres interaccions. Les col·laboracions de *Dirac*, *Pauli* i *Dyson* han estat essencials en aquell desenvolupament.

La generalització de tot l'anterior ens permetrà l'estudi de *les interaccions febles i fortes* mitjançant la conversió de les invariàncies gauge globals en invariàncies gauge locals, a través de la introducció dels camps gauge corresponents.

Quant al sistema d'unitats, s'empra sovint el *sistema natural d'unitats*, complementari del C.G.S. de *Heaviside* o *Gauss* en els quals les dimensions d'una acció, com  $\hbar$ , són  $ML^2T^{-1}$ , les d'una

velocitat, com  $c$ ,  $LT^{-1}$  i, finalment, les d'una càrrega elèctrica, com  $e$ ,  $M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$ . En el sistema natural d'unitats fem  $c=1$  i  $\hbar=1$ , amb la qual cosa les expressions se simplifiquen extraordinàriament. A partir d'elles podem recuperar fàcilment les formes tradicionals. Així, per exemple, l'expressió  $E^2 = m^2 + \vec{k}^2$  amb el sistema natural d'unitats caldrà convertir-la, per tal de retrobar les dimensions convencionals, en  $E^2 = m^2c^4 + \hbar^2c^2\vec{k}^2$ ,

## L'OPERADOR S

A partir d'una densitat lagrangiana  $\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_I$ , on el primer terme representa els camps quàntics lliures i el segon la interacció, podem trobar el hamiltonià  $H=H_0+H_I$ . Si ens situem amb la imatge de *Tomonaga*, l'operador  $H_0$  ens donarà l'evolució  $H_I(t)$ , mentre que aquest farà evolucionar els estats, constants sota  $H_0$ .

Els estats evolucionaran d'acord amb la llei

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = H_I(t)|\Psi\rangle$$

, on  $H_I(t)$  és l'operador deduït del  $\mathcal{H}_I(t)$ , obtingut *substituint tots els camps per les solucions temporals de les equacions clàssiques* (vegeu les consideracions amb el camp real de *Klein-Gordon*).

Els estats inicials i finals s'expressaran com a combinació lineal d'estats de l'espai de *Fock obtinguts formalment per l'acció dels operadors de creació sobre  $|0\rangle$* .

Si estem estudiant la interacció d'un conjunt de partícules, ens interessarà saber la probabilitat que a partir d'un estat inicial  $|i\rangle$  unitari corresponent a un temps  $t \rightarrow -\infty$ , l'estat final es manifesti, segons un estat concret d'un conjunt ortonormal  $|f\rangle$  que correspongui a un temps  $t \rightarrow +\infty$ . Aquesta probabilitat ve donada per

$$\langle f|S|i\rangle^2 = S_{fi}^2$$

, on  $S$  és l'operador que ens dóna l'estat final  $S|i\rangle$ , que projectarem sobre el  $|f\rangle$ , i  $\langle f|S|i\rangle = S_{fi}$  és la *matriu S*. Degut que  $H_I$  és hermític, l'estat evolucionarà, segons una transformació unitària

$$S|i\rangle = \sum_f \langle f|S|i\rangle |f\rangle = \sum_f S_{fi} |f\rangle \text{ amb } \sum_f S_{fi}^2 = 1$$

(vegeu "La dinàmica quàntica" al capítol 7), que preservarà el producte escalar.

## MÈTODES PERTORBATIUS: DIAGRAMES DE FEYNMAN

A partir de l'equació evolutiva

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = H_I(t) |\Psi\rangle$$

obtenim el valor exacte de l'estat  $|\Psi\rangle$

$$|\Psi(t)\rangle = |i\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t H_I(t') |\Psi(t')\rangle dt'$$

El problema radica que l'estat final figura dins de la integral. Podem, però, trobar-lo iterativament mitjançant pertorbacions.

Una primera aproximació s'obté substituint l'estat del segon membre per  $|i\rangle$

$$|\Psi(t)\rangle = |i\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t H_I(t') |i\rangle dt' = |i\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_{\Omega} \mathcal{H}_I(x) |i\rangle d\Omega$$

Una segona aproximació apareixerà, si fem la substitució de l'estat final per aquesta primera aproximació:

$$|\Psi(t)\rangle = |i\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_{\Omega} \mathcal{H}_I(x) |i\rangle d\Omega + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \iint_{\Omega_1, \Omega_2} \mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) |i\rangle d^4x_1 d^4x_2$$

De manera anàloga podem obtenir les aproximacions successives. L'operador  $S$  serà finalment

$$1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{\Omega} \mathcal{H}_I(x) d\Omega + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \iint_{\Omega_1, \Omega_2} \mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) d^4x_1 d^4x_2 + \dots$$

L'operador  $S$  conté totes les possibilitats d'actuació sobre un estat inicial qualsevol per obtenir, després de projectar-se, un estat final també arbitrari on poden aparèixer la destrucció i creació

de múltiples partícules. És evident que, si tinguéssim en compte totes les possibilitats de  $S$ , hi hauria una infinitat de projeccions de l'estat evolutiu sobre l'estat  $|f\rangle$  que serien nul·les. Per tant, totes aquelles possibilitats que en un procés concret donarien una contribució final nul·la poden rebutjar-se d'entrada, amb la qual cosa el càlcul anterior se simplificarà de forma extraordinària. El teorema de Wick ens dona algunes pautes per fer-ne la selecció.

A l'estudi dels camps de *Klein-Gordon*, *Dirac* i *Maxwell* es defineixen els propagadors  $\Delta_F(x)$ ,  $S_F(x)$  i  $D_F(x)$ , respectivament. Aquests propagadors intervenen de forma decisiva als càlculs simplificats mitjançant pertorbacions, ans esmentats.

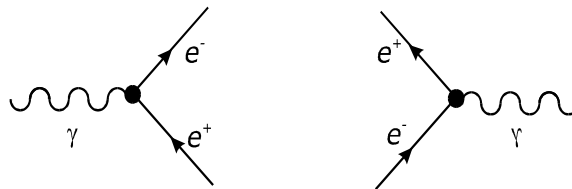
A partir d'ara parlarem únicament de la interacció entre els camps de *Maxwell* i de *Dirac*: la interacció electromagnètica. Aquí  $S$  conté totes les possibilitats que poden ocórrer amb electrons, positrons i fotons.

Per a cada aproximació utilitzarem *diagrames* que ens facilitaran els càlculs. En aquests diagrames el temps creix cap a la dreta, els electrons "viatgen" cap a la dreta i els positrons (per tal de distingir-los dels electrons i facilitar-ne els càlculs únicament) "viatgen" cap a l'esquerra. El diagrama bàsic, originat a partir de la forma de la densitat hamiltoniana

$$\mathcal{H}_I(x) = -\mathcal{L}_I(x) = e\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)A_\mu(x)$$

, és el vèrtex on conflueixen un camp de *Maxwell* i dos de *Dirac*.

Els diagrames d'un sol vèrtex poden representar la dispersió d'un electró o d'un positró i la creació o anihilació d'una parella electró-positró. Els diagrames que segueixen ens donen la creació i la destrucció d'una parella electró-positró, respectivament, amb un únic fotó en el procés.

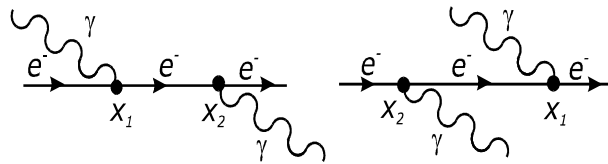


Aquests dos diagrames no intervenen en cap procés físic real, perquè la suma de dos vectors temporals mai pot donar un vector

quadridimensional de mòdul zero. El mateix ocorre en tots els diagrames d'un vèrtex.

A partir dels diagrames d'un vèrtex obtenim diagrames de dos vèrtexs a l'aproximació següent (*primera aproximació real*).

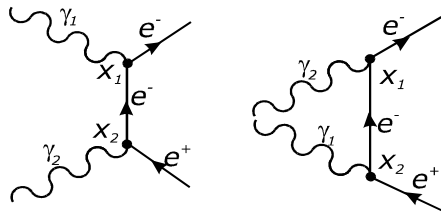
A la dispersió electró-fotó (*efecte Compton*, similar a l'*efecte Raman* de canvi de freqüència de la llum que permet identificar la matèria que travessa) tindríem els dos diagrames que segueixen:



El primer diagrama l'interpretaríem així: un electró i un fotó es troben al punt  $x_1$  de l'espai de *Minkowski* i es destrueixen amb la creació d'un electró *virtual* que es propaga des de  $x_1$  a  $x_2$ . Aquest es destrueix a  $x_2$  i es creen un nou electró i un nou fotó. En el procés d'integració apareixen les funcions delta de *Dirac* del quadrivector energia-impuls i de la càrrega elèctrica totals en cada vèrtex. En conseqüència, *a cada vèrtex es compleixen les lleis de conservació de la càrrega elèctrica i de la energia-impuls, encara que les partícules intermèdies no puguin ser reals.*

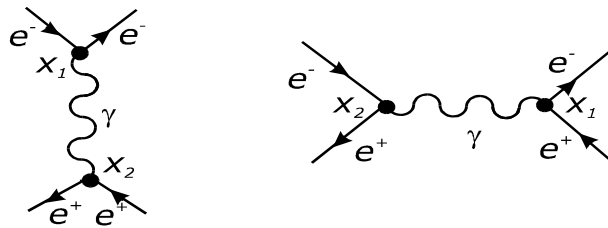
A través del teorema de *Wick* trobem les expressions matemàtiques que adjuntem als vèrtexs i a les línies del diagrama corresponent. A les línies exteriors, que representen partícules reals, estan presents els camps lliures de *Dirac* (electrònics o positrònics) o de *Maxwell* i a la línia interior hi és el propagador  $S_F$  de *Dirac*. A partir de les expressions anteriors el càlcul de  $S$  mitjançant pertorbacions és senzill.

La creació de la parella  $e^-e^+$  a partir de dos fotons tindria present aquests diagrames:



El primer dels diagrames anteriors tindria aquesta interpretació: a  $x_2$  un fotó es destrueix i es crea un positró i un electró virtual que es propaga de  $x_2$  a  $x_1$ , on és destruït conjuntament amb l'altre fotó i es crea l'electró final.

Per acabar, a la dispersió entre un electró i un positró li adjuntaríem aquests diagrames:



El segon dels diagrames el llegiríem així: un electró i un positró s'anihilen a  $x_2$  i es crea un fotó virtual que es propaga a  $x_1$  on és destruït i on es crea una parella electró-positró. Fixem-nos que els processos als dos vèrtexs no poden ser reals ja que la conservació de l'energia-impuls implica que el seu mòdul per al fotó no sigui nul. Per al càlcul dels termes corresponents a les pertorbacions adjuntem a la línia de propagació del fotó virtual una expressió on figura el propagador  $D_F$  del fotó.

D'aquesta manera, mitjançant els diagrames anteriors i les regles deduïdes del teorema de *Wick*, podem calcular, a través de les pertorbacions, els termes de  $S$  per al procés que estudiem, rebutjant tots els que sabem que donaran contribució nul·la.

Conegut  $S$ , podem trobar finalment  $\langle f|S|i\rangle$  que ens dóna la probabilitat de transició entre l'estat inicial  $|i\rangle$  i el final  $|f\rangle$ :

$$\langle f|S|i\rangle = \delta_{if} + F \cdot \mathcal{M}$$

$F$  és una expressió on participen les energies-impulsos de totes les partícules inicials i finals i  $\mathcal{M}$ , anomenada *amplitud de Feynman*, és igual a la suma d'amplituds de cada diagrama. Aquestes amplituds es poden calcular mitjançant *les regles de Feynman* sobre diagrames pràcticament iguals als que hem vist i on figuren les energies-impulsos de les partícules (*diagrames de Feynman*). De fet, a la pràctica els càlculs no es realitzen a partir del teorema de *Wick* i els diagrames espaciotemporals, sinó a

partir de les regles de *Feynman* i els seus diagrames, que són una conseqüència de tot l'anterior.

Parlant en general, a les interaccions els diferents *canals* que contribueixen al valor final de  $\mathcal{M}$  ho poden fer de forma constructiva o destructiva.

Els processos que hem vist corresponen a la primera aproximació *efectiva*. A les aproximacions següents ens apareixeran diagrames que poden donar lloc a *divergències*. Aquestes divergències s'eliminen mitjançant la *renormalització*, que comentarem més endavant.

Els diagrames corresponents a aproximacions successives tenen un vèrtex de més. La càrrega de la partícula/antipartícula de cada vèrtex apareix com a factor de proporcionalitat per al càlcul de  $\mathcal{M}$ . En la primera aproximació efectiva aquella càrrega participarà amb el seu quadrat a través de la *constant d'estructura fina* adimensional

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c}$$

La constant d'estructura fina val molt aproximadament  $1/137$ . Aquest valor és molt petit i, en conseqüència, la sèrie obtinguda convergirà molt ràpidament.

## QÜESTIONS ENTORN DE L'E.D.Q.

1-Viatgen els positrons cap al passat? Els diagrames *no* representen processos reals: són només una ajuda per simplificar el càlcul dels termes pertorbatius... *o contenen un bri de realitat?*

2-Hi figuren taquions, als diagrames? Aquesta qüestió sorgeix perquè hi ha diagrames amb vèrtexs on una parella  $e^-e^+$  és destruïda amb la creació d'un fotó. Això només seria possible, si al menys un element de la parella fos un taquíó, ja que la suma de dos vectors temporals mai pot donar un vector nul a l'espai de *Minkowski* (vegeu l'estructura dels cons de llum al capítol 2). A l'*E.D.Q.* els taquions poden ser evitats amb la presència de fotons *virtuals* amb el mòdul de l'energia-impuls diferent de zero. La *suspensió temporal de la conservació de l'energia* que permet el principi d'incertesa energètica faria possible el procés anterior.

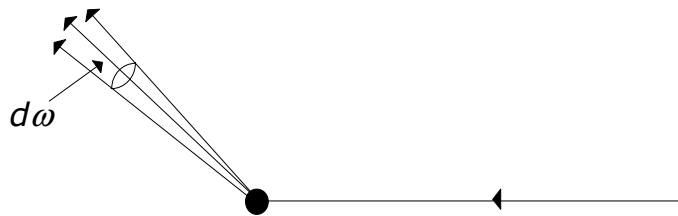


Per altra banda, amb la presència dels propagadors entre dos punts  $x_2$  i  $x_1$  amb una separació espacial no implicaria aquest fet la propagació d'un taquíó? Els propagadors són únicament elements de càlcul que no impliquen un moviment real de cap partícula i la interpretació anterior és arbitrària.

3-Vol dir això que els taquions i el viatge cap al passat no són possibles? Res no pot dir-se: la nostra concepció actual del temps, encara a la infantesa, no ens ho permet.

4-Per què, si  $S$  conté *tot* el que pot esdevenir, seleccionem només uns diagrames per al càlcul? Perquè, a partir de la selecció dels estats  $|i\rangle$  i  $|f\rangle$ , les altres contribucions, mitjançant els operadors de creació i destrucció que figuren a  $\mathcal{H}_I$ , valdrien zero.

5-Com es pot relacionar  $\langle f|S|i\rangle$  amb qüestions reals? Si hi ha un flux de  $n$  partícules per unitat de temps i unitat de superfície normal al feix que incideix sobre un centre de dispersió, ens interessa saber el nombre  $dN$  de partícules que es dispersen dins l'angle sòlid  $d\omega$  per unitat de temps (poden ésser de diferent tipus en haver-hi una reacció).



La secció eficaç  $d\sigma$  es defineix a partir de

$$dN = n \cdot d\sigma$$

, té les dimensions d'una superfície i es dedueix fàcilment del valor de  $\langle f|S|i\rangle$ , que ens permet trobar la probabilitat que  $|f\rangle$  estigui dins de l'angle sòlid.

6-Com podríem saber el temps de vida d'una partícula? Suposem un tipus d'interacció, com la feble, que permet la destrucció per diferents camins d'una partícula  $P$  amb la creació corresponent d'altres. Donat un estat inicial de  $P$  amb una energia-

impuls i una helicitat concretes, podrem conèixer la probabilitat d'anihilació de la partícula en cada instant, tot tenint en compte les diferents possibilitats d'energia-impuls i helicitat de les partícules finals per als diferents camins. D'aquí calcularem el temps mitjà de vida de  $P$  per a aquell estat inicial. Si desconeixem l'helicitat de  $P$ , finalment trobarem la mitjana del seu temps de vida sobre totes les helicitats possibles de  $P$ .

7-Al formulisme  $E.D.Q.$  ha desaparegut tota referència *espacial* en el càlcul final de  $\langle f|S|i\rangle$ . Sabem, però, que la interacció electromagnètica clàssica depèn de la separació entre les partícules. On figura aquesta dependència a la interacció, per exemple, entre dos electrons? A la integració doble corresponent a la primera aproximació iterativa efectiva hi ha les dues variables espaciotemporals  $x_1$  i  $x_2$ . Entre d'altres termes introduïts a la part integrant a través dels diagrames hi és el propagador del fotó  $D_F(x_2-x_1)$ . La part del propagador que correspon de forma conjunta a les polaritzacions longitudinals i escalars depèn de la distància tridimensional entre els punts, segons la seva expressió inversa, pròpia del potencial de *Coulomb*.<sup>17</sup> Al còmput final, per tant, la contribució de les parelles de punts amb distàncies més petites serà més gran que les d'aquelles on la distància tridimensional sigui més elevada. En disminuir la part contributiva al resultat final amb la distància esmentada, podem dir que "la interacció entre les partícules disminueix també amb la distància entre elles".

Cal fer la darrera afirmació *amb totes les precaucions possibles*, perquè pel principi d'incertesa, en tenir una dispersió nul·la dels impulsos definitoris de l'espai de *Fock*, la dispersió espacial és infinita i, per tant, no té gaire sentit parlar de la separació entre les partícules.

8-Com modifica l' $E.D.Q.$  l'acció dels camps clàssics sobre les partícules? Haurem d'introduir les expressions clàssiques dels camps en tot el procés i interpretar els nous diagrames de *Feynman* que apareixeran als càlculs. Podem diferenciar aquests casos:

a) *Interacció d'un fotó amb un camp magnètic clàssic*. La *refracció* té ara una probabilitat de produir-se. En un formulisme clàssic, com a conseqüència del principi de superposició degut a la linealitat de les equacions del camp electromagnètic, això no és

permès; en efecte: si el camp magnètic i l'ona electromagnètica que no ha sofert la refracció poden existir *independentment*, també ho podran fer *conjuntament*.

b) *Interacció del camp quàntic electró-positró amb un camp elèctric clàssic de Coulomb*. Cal introduir també el camp quàntic de *Maxwell*. El resultat important és que, quan tenim electrons ultraràpids en presència d'un camp de *Coulomb*, hi ha una probabilitat petita que es creï un fotó (*Bremsstrahlung*). L'aparició del fotó és impossible sense l'existència del camp elèctric, com es veuria fàcilment de l'estudi dels diagrames del procés.

c) *Interacció dels potencials electromagnètics clàssics amb l'electró*. Sabem que un electró clàssic només és afectat pels camps, no pels potencials. En física quàntica no ocorre això, perquè la llei universal és la suma sobre històries i el que figura a cada història és el potencial (en un entorn clàssic, però, on intervenen només les històries amb acció quasiextremal, els potencials queden "incorporats" al camp). L'efecte *Aharonov-Bohm*, que exposem a continuació, ens demostra que l'anterior és cert:

->A l'experiment de les dues esclatxes apareix la interferència coneguda entre les amplituds de probabilitat. Aquesta interferència pot explicar-se per *la diferència de fase* de les ones incidents. Amb una variació idèntica de les fases en tots els punts, no apareix cap canvi en la interferència (*invariància gauge global*).

->A continuació col·loquem entre les dues esclatxes un dispositiu creador d'un camp magnètic que, gràcies a una pantalla antimagnètica, no pugui exterioritzar-se: fora del dispositiu tindrem un valor nul del camp, però no pas del seu potencial magnètic. La *invariància gauge local* farà que la presència del potencial magnètic a l'exterior obligui a una variació de fase precisa i diferent en cada punt de l'espai. Com a conseqüència, la figura d'interferència serà distinta (*efecte Aharonov-Bohm*).

->A cada punt espaciotemporal podem adscriure una *fibra* constituïda per les diferents funcions d'ona obtingudes a través de la transformació gauge que canvia la seva fase. Amb la presència del potencial electromagnètic, un cop elegit un gauge concret, la *substitució mínima* es pot interpretar com a *una connexió a l'espai fibrat* amb una *curvatura* no nul·la (vegeu l'apèndix 1). Es demostra que aquesta curvatura de la connexió (*connexió gauge*), que no

apareix en absència del camp, és la causa de l'efecte *Aharonov-Bohm* ans esmentat.

9-Què ens ha aportat fonamentalment la teoria quàntica de camps? La teoria de camps quàntics és hereva de la intuïció guiada per la bellesa de les formes matemàtiques i *Dirac* és el pare d'ella. La seva equació restarà com a una de les obres cabdals del pensament humà. L'ideal de les noces de la relativitat i de la física quàntica, però, no es realitzà fins arribar a la teoria dels camps quàntics, i això només en part. Mitjançant els camps quàntics hem assolit la relació espín-estadística, la predicció més acurada de l'existència d'antipartícules, la interpretació gauge de la interacció electromagnètica (que més endavant generalitzarem a altres interaccions) i una precisió en l'*E.D.Q.* de dotze xifres en el càlcul del moment magnètic de l'electró.

Quant a l'existència d'antipartícules, únicament hem demostrat l'existència de parelles amb càrregues oposades, però no hem trobat la quantificació de la càrrega elèctrica. *Dirac* ho demostrà a partir de la presència de *monopols magnètics* (un monopol magnètic és un pol aïllat d'un imant) amb aquest raonament:

-> Fem l'estudi del sistema format per un monopol magnètic i una càrrega elèctrica.

-> A partir del camp electromagnètic creat a l'espai per ambdós, hom troba el moment angular equivalent del camp (vegeu  $M_{\alpha\beta}$  al capítol 4). Aquest moment angular és proporcional al producte de les càrregues elèctrica i magnètica i independent de la separació d'ambdues.

-> La quantificació coneguda del moment angular porta a la quantificació de la càrrega elèctrica, si existeix un monopol.

-> *Dirac*, a partir del fet conegut de la quantificació de la càrrega elèctrica, va *postular*, amb un cert marge d'error, l'existència de monopols. La qüestió resta oberta.

10-Què es pot dir de l'afirmació que el nombre de partícules corresponent a un estat no sigui un invariant?

La paradoxa anterior és causada per la idea preconcebuda que el buit és un invariant. Això, però, no és cert. Les relacions d'incertesa donen lloc, fins i tot a *OK*, a *fluctuacions quàntiques de punt zero* ("zero point energy" o "ZPE") amb la creació i destrucció contínues de partícules virtuals<sup>7</sup>. D'aquesta manera el principi de

conservació de l'energia podria ser violat durant un temps de "préstec". L'estructura, però, de les partícules virtuals canvia quan apareix l'asimetria del buit. Si les fluctuacions del buit és limiten tindrem una energia local del buit més petita que la del buit "lliure": parlem d'una "energia negativa" que actua amb una pressió i gravitació també negatives. Així, l'acció dels fotons virtuals sobre les càrregues elèctriques de dues plaques metàl·liques properes és diferent a l'exterior i a l'interior d'elles amb l'aparició d'una força d'atracció entre les plaques (*efecte Casimir*).

Quelcom de semblant pot ocórrer amb la interacció del buit residual amb un sistema de partícules (*detector*) accelerat. L'anterior dona lloc a una densitat lagrangiana distinta corresponent a un sistema també distint i és possible que el nostre buit es manifesti amb la creació de partícules. Aquesta creació no sortiria del no-res, sinó que seria possible a partir de l'energia que s'estaria subministrant constantment al sistema accelerat i que, en part, permetria l'aparició neta de fotons des del buit. Aquest conjunt de partícules es detectaria mitjançant un termòmetre situat en el sistema accelerat, que marcaria una temperatura proporcional a l'acceleració del sistema observacional (Llei d'*Unruh*). La diferència entre els buits dels observadors inercials i no inercials resoldria la paradoxa que el nombre de fotons del buit no fos el mateix. Per mantenir el principi d'equivalència einstenià (vegeu el capítol 6) caldria elevar la temperatura de l'ambient d'un sistema inercial proporcionalment a l'acceleració del no inercial.

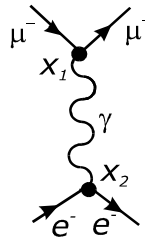
L'absorció i reemissió del fotó degudes a la seva interacció amb les partícules virtuals i, en particular, amb l'hipotètic gravitó produirien un retard amb la variació *aparent* de la velocitat de la llum: una densitat energètica gran del buit originaria una minva creixent amb la freqüència de la velocitat de la llum, com ocorre amb la refracció, mentre que amb una densitat petita l'absorció i la reemissió minvarien, la qual cosa originaria una velocitat aparent de la llum superior a la del buit "nu" (efecte *Scharnhorst*). Les interaccions, incloses les forces gravitatòries i les inercials, les masses de les partícules i les constants de la natura es podrien explicar, potser, a partir de l'acció de *ZPE*.

11-L'equació de *Dirac* pot representar molts sistemes de partícules-antipartícules (electrons  $e^-$ , muons  $\mu^-$ , etc.). Si, per exemple, a la interacció només intervenen muons-antimuons i fotons el formulisme vist és aplicable canviant-hi la massa.

Com podríem, però, estudiar la interacció real electró-muó, si els termes corresponents de  $\mathcal{L}_I$  acoblen únicament  $e^-e^+\gamma$  o  $\mu^-\mu^+\gamma$ ? Definirem la densitat lagrangiana

$$\mathcal{L}_I = \mathcal{L}_I(e^+e^-\gamma) + \mathcal{L}_I(\mu^+\mu^-\gamma)$$

i no considerarem diagrames que violin la conservació *del número leptònic electrònic o muònic* (vegeu més endavant el capítol 9) o que no apareguin al desenvolupament iteratiu. Altrament, tindrem en compte diagrames, com el de la figura següent, que apareixen al desenvolupament mitjançant perturbacions i no violen cap llei establerta.



## TEOREMA CPT

Resumim les propietats d'aquestes transformacions:

1-*Inversió espacial o paritat (P)*:

- >S'inverteixen els impulsos.
- >Es mantenen els moments orbitals i els espins.
- >Les helicitats canvien de signe.

2-*Inversió temporal (T)*:

- >S'inverteixen els impulsos.
- >S'inverteixen els moments orbitals i els espins.
- >Es conserven les helicitats.

3-*Conjugació de càrrega (C)*:

- >S'intercanvien partícules i antipartícules.
- >Es conserven les altres variables.

Com canviarà  $\langle f|S|i \rangle$  per a totes les combinacions possibles de les transformacions C, P, i T? Es conservarà? Tot dependrà del

tipus d'interacció. En una interacció feble on intervinguin neutrins no pot haver-hi invariància per paritat, ja que, si abans de la transformació hi havia neutrins amb helicitat negativa (*levogirs*), arribaríem a la contradicció d'admetre després de la transformació  $P$  neutrins amb helicitat positiva (*dextrogirs*), que mai han estat observats. En canvi sí que *podria* haver-hi la invariància  $CP$ , ja que els antineutrins són dextrogirs (en certs processos físics també es viola la invariància  $CP$ , com veurem als capítols següents).

El teorema  $CPT$  afirma que, si construïm  $\mathcal{L}$  segons "regles normals", que incloguin les simetries de la relativitat en un espai de *Minkowski*, l'hermiticitat i la quantificació dels camps amb les regles de *Pauli* (amb commutadors o anticommutadors, segons l'espín),  $\langle f|S|i\rangle$  és invariant amb les transformacions  $C$ ,  $P$  i  $T$  conjuntes, sigui quin sigui l'ordre en què les apliquem.

## LA RENORMALITZACIÓ

Podem resumir així el procés de renormalització:

a) En el desenvolupament iteratiu d'ordre superior apareixen diagrames que contribueixen de manera divergent a l'estudi de la sèrie obtinguda mitjançant pertorbacions.

b) Introduïm un canvi a les expressions de càlcul, que elimini les divergències temporalment, amb la inclusió de paràmetres que regularitzin la situació anòmala (*regularització*).

c) Finalment, amb la *reinterpretació* de certs termes, equivalent formalment a la subtracció de valors infinits no observables amb un resultat *observable* finit (d'acord amb *Kramer*), i el pas al límit per a determinats valors d'aquells paràmetres, obtenim les correccions *radiatives* d'ordre superior exemptes de divergències.

Existeixen diferents mètodes de regularització. Nosaltres comentarem molt de passada les regularitzacions de *tall*, *dimensional* i *reticular* (el grup de renormalització està lligat al fet d'eliminació de les divergències).

### **1-Regularització de tall ("Cut-off regularisation").**

Introduïm un terme  $F(\lambda)$  dins de l'integrand que faci convergents els càlculs (amb el pas al límit per a cert valor de  $\lambda$  reapareix la divergència).

A continuació calculem els elements pertorbatius que afegim a la pertorbació anterior. Suposem, per simplificar, que inicialment havíem obtingut una expressió  $f(e_0)$ , on  $e_0$  és la càrrega de l'electró que anomenarem *càrrega nua*, i que, quan afegim la nova pertorbació, aquella es transforma en  $f(e)+g$ , on en el límit ans esmentat  $f(e)$  dóna lloc a la divergència original.

Si la càrrega nua no és la real i  $e$  representa la càrrega real mesurada, podem *reinterpretar*  $f(e)$  com a funció de la càrrega real. En el límit anterior la divergència originada per causa de  $e$  ha desaparegut i el límit de  $g$  és la correcció pertorbativa.

### 2-Regularització dimensional.

En els càlculs pertorbatius apareixen integrals a l'espai de quatre dimensions, com ja sabem. Si canviem la dimensió dels càlculs de 4 a  $D$ , ens apareixerà una expressió final en funció de  $D$ , que per a  $D=4$  és divergent.

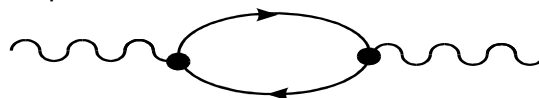
Si l'expressió anterior la *reinterpretem* donant a  $D$  valors no enters i calculem el seu límit quan  $D \rightarrow 4$ , ens desapareixerà la divergència.

### 3-Regularització reticular.

A les *teories reticulars* ("lattice gauge theories"), desenvolupades independentment per *Wilson* i *Polyakov*, l'espai continu se substitueix per una xarxa, els càlculs es fan al llarg de les vores i *llaços* del reticle i els problemes de les divergències desapareixen. Elles han inspirat la formulació de la *gravitació quàntica de llaços amb la quantificació de l'espai i del temps* (vegeu el capítol 11).

Com podem veure, tot l'anterior és prou arbitrari i resulta sorprenent que l'exactitud dels càlculs en *E.D.Q.* sigui tan alt. És l'arbitrarietat esmentada i la seva manca de bellesa la que fa afirmar a *Dirac* que la teoria no pot ser definitiva i la que ens permet dir que *des d'un punt de vista purament teòric no és necessari que una teoria sigui renormalitzable*, si tot això no és compensat per noves troballes experimentals (vegeu més endavant al capítol 10 la hipòtesi del *bosó de Higgs*).

El diagrama següent forma part d'altres i és causa de divergències que es poden renormalitzar.





El diagrama representa la transformació transitòria d'un fotó mitjançant la "radiació" d'una parella electró-positró. L'efecte final per renormalització és la variació de l'energia efectiva o *autoenergia* del fotó. Un camp electromagnètic exterior modificarà la distribució de les parelles virtuals electró-positró (*polarització del buit*) i, per tant, l'autoenergia fotònica. Anàlogament, en altres diagrames es permeten transformacions transitòries d'un electró que varien la seva energia efectiva o *autoenergia*<sup>24</sup> mitjançant la renormalització (*correccions radiatives*)

A través de la renormalització introduïm una correcció perturbativa a la constant d'estructura fina que depèn de l'energia del sistema i fa que la "constant" augmenti conjuntament amb l'energia. Una energia elevada permetrà un apropament més gran de les partícules que interaccionin, la qual cosa vol dir que la constant d'estructura fina augmentarà quan la separació entre les partícules disminueixi. Quan parlem, doncs, de la constant anterior ens referim als seus efectes per a certs marges de distàncies en què aquella val amb molta aproximació *1/137*.

Aquest efecte *sembla* indicar que l'electró s'estén entorn seu a través de la polarització del buit amb la creació de les parelles electró-positró. A partir d'aquí l'electró atrau les càrregues positives i rebutja les negatives. La càrrega neta disminueix, doncs, amb la distància en augmentar el núvol positiu del seu voltant i resta amagada la infinitud de la càrrega nua. Tot ocorre com si l'electró tingués una certa estructura interna (*estructura fina*) que, tanmateix, és molt diferent de la del protó compost per quarks.

El que hem dit posa en qüestió l'elementalitat de l'electró. Si la massa de l'electró tingués un origen electromagnètic, obtindríem

$$e^2 / r \cong mc^2$$

, la qual cosa donaria un radi de l'electró de  $3 \times 10^{-13}$  cm aproximadament. Si això fos cert, l'electró no podria ser elemental ja que, degut al valor finit de *c*, variaria la seva forma en no poder-se propagar cap interacció instantàniament i simultània a tots els seus punts. L'electró podria estar format pels hipotètics *risons* o *preons*.

No cal ni dir que tot l'anterior són especulacions.

Entre les confirmacions espectaculars de l'*E.D.Q.* podem esmentar les que segueixen i que només comentem en la seva estructura general:

**a) El moment magnètic anòmal.**

La raó giromagnètica de l'electró en presència d'un camp magnètic no és exactament 2. L'estudi de la *dispersió electrònica*, amb la incorporació addicional d'un camp magnètic clàssic als diagrames de *Feynman* i a les expressions corresponents, ens dona els termes pertorbatius que, un cop renormalitzats i comparats amb els resultats coneguts en l'aproximació semiclàssica, ens mostren el canvi de la raó giromagnètica efectiva.

**b) Efecte Lamb.**

Realitzem una reinterpretació dels diagrames de *Feynman* on les línies electròniques representin estats de l'àtom d'hidrogen en lloc de partícules lliures. Amb la introducció de la interacció quàntica conjuntament amb la de *Coulomb* del nucli de l'àtom ens apareixen termes pertorbatius d'autoenergia electrònica amb l'efecte net final de la modificació i subdivisió dels nivells degenerats. O dit d'una altra manera: ens apareixen estats  $|f\rangle$  als quals pot col·lapsar l'estat evolutiu final i que abans no hi eren, degut que ara  $\langle f|S|i\rangle \neq 0$ .

## ESTUDIS NO PERTORBATIUS

*Les teories efectives i les teories reticulars*, que hem comentat molt de passada a l'apartat sobre "Renormalització" d'aquest capítol, permeten, fonamentalment, el coneixement de sistemes quàntics en zones on el càlcul pertorbatiu no sigui possible. Ambdues teories acostumen a utilitzar-se a les zones de baixes energies: això és el que ocorre en l'estudi dels sistemes lligats i de les seves interaccions, com és el cas dels nucleons i de la interacció residual nuclear entre ells.

L'acció corresponent a cada història o camí en una teoria efectiva es calcula aproximadament a partir del tall d'un desenvolupament taylorià adient. L'*EDQ* i la teoria de la interacció forta amb intercanvi de pions són teories efectives de la interacció electrofeble i de la *CDQ*, respectivament. Anàlogament, *el model*

*estàndard* és una teoria efectiva d'una possible teoria més fonamental. L'acció que hem utilitzat a la relativitat general és també la corresponent a una teoria efectiva de baixes energies deduïda d'una de més general on figuri una densitat lagrangiana funció de les potències successives de la curvatura  $R$ .

De vegades, a les teories efectives l'espai-temps continu és substituït per un reticle: es tracta de les *teories efectives reticulars*, on ambdues teories col·laboren oferint a l'altra els aspectes més positius que elles tenen.

## ES POT VIATJAR DES DEL FUTUR?

L'ordre en què col·loquem els diferents termes positrònics, per a les integracions corresponents als càlculs pertorbatius de les interaccions, es fa mitjançant una lectura des del futur cap al passat en els diagrames de *Feynman*. Això no és pas una raó convincent per afirmar el viatge cap al passat dels positrons ja que, en principi, es tractaria únicament d'una regla pràctica per realitzar-ne els càlculs. Hem subratllat el "en principi", perquè l'espontaneïtat del procés introduït per *Dyson* ens podria donar un suport petit, però suport al cap i a la fi, per assegurar que el procés esmentat és real, com semblaria indicar-nos la simetria temporal de les equacions evolutives quàntiques, implícita en el teorema CPT. Vegem a continuació algunes consideracions a partir d'un hipotètic viatge des del futur a nivell quàntic:

a) A l'apartat "El camp creat per les càrregues en moviment" del capítol 5 ja vàrem comentar la solució que donaren *Feynman* i *Wheeler* als problemes de les solucions autoaccelerades i de les divergències de la massa electromagnètica, emprant ensems potencials retardats i avançats.

b) Pel teorema CPT una partícula viatjant cap al futur és equivalent a la seva antipartícula viatjant cap al passat en una trajectòria invertida. Un electró que pogués anar fent ziga-zagues cap al futur i cap al passat podria estar en diferents llocs en el mateix instant. Això permetria donar una explicació al problema de la no-localitat: es tractaria de la bilocalitat i, en general, de la

*multilocalitat*. El mateix efecte permetria entendre la presència simultània de totes les històries de *Feynman*.

c) A l'experiment de les dues esclatxes un electró viatjaria cap al futur passant per una esclatxa, interaccionaria amb el detector i es crearia un positró que passaria per l'altra esclatxa viatjant cap al passat. A l'emissor coincidirien ambdues partícules, la qual cosa seria equivalent a l'emissió de l'electró viatjant cap al futur i passant simultàniament per ambdues esclatxes. Evitaríem, però, els problemes de la coherència quàntica, el de la comunicació d'informació entre les dues esclatxes a velocitats superiors a  $c$  i el dels molts mons: tot el procés ocorreria en un únic món.

d) La fletxa psicològica del temps, que negaria la realitat de tot l'anterior, no seria sinó una il·lusió deguda a l'estructura macroscòpica i irreversible de la nostra ment (vegeu l'apartat sobre irreversibilitat de l'apèndix 5).

## **PARTÍCULES O CAMPS?**

L'*E.D.Q.* (on el desenvolupament de *Fourier* d'un camp ens aboca a les partícules) ens planteja la qüestió sobre com és la realitat. Tenim partícules o camps? La resposta des d'un punt de vista positivista és clara: tot són partícules i el camp és només un artifici matemàtic, sense cap significat real. Des d'una concepció platònica, altrament, ambdós aspectes són importants ontològicament: les partícules no serien altra cosa que la manifestació fenomenològica del món de les idees, la realitat profunda més real (camps?) que es troba sota l'aparença dels fenòmens.