# APÈNDIX 1: GEOMETRIA

## INTRODUCCIÓ

Suposarem coneguts els conceptes de *grup, anell, àlgebra, cos i espai vectorial.* Partirem d'un *espai vectorial euclidià* $E_n$ de dimensió *n,* incorporant el *producte escalar de dos vectors* a l'espai vectorial ordinari. Qualsevol índex podrà variar des d'*1* a *n.*

A partir d'ara seguirem en l'escriptura el criteri de *contracció d'Einstein*: sempre que aparegui una expressió amb la repetició d'un índex superior i un d'inferior, entendrem que caldrà realitzar la suma sobre les expressions obtingudes donant als índexs tots els valors possibles. Així, per exemple,

$$A_i . B^i = \sum_i A_i . B^i$$

Si el conjunt $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ és una base vectorial de l'espai vectorial euclidià $E_n$, definirem $g_{ij} = \vec{e}_i . \vec{e}_j$ .

A partir de l'expressió vectorial $\vec{x} = x^i . \vec{e}_i$ obtenim els *components contravariants* $x^i$, *o simplement components,* d'un vector en una base vectorial. Els *components covariants* es defineixen mitjançant la contracció $x_i = g_{ij} . x^j$

Amb tots els conceptes anteriors, el producte escalar de dos vectors s'expressa senzillament així:

$$\vec{x} . \vec{y} = g_{ij} . x^i . y^j = x^i . y_i = x_j . y^j$$

Els $g_{ij}$ verifiquen $g_{ij} = g_{ji}$ i la matriu d'elements $g_{ij}$ té el seu determinant $g$ no nul. Els $g^{ij}$ són els elements de la matriu inversa de l'anterior i ens permetran escriure $g^{ij} . x_i = x^j$.

D'aquesta manera, per contracció dels components contravariants d'un vector amb $g_{ij}$ obtenim els seus components covariants i per contracció dels components covariants d'aquell amb $g^{ij}$ n'obtenim els components contravariants.

En cap cas pressuposem que els nostres espais vectorials siguin *pròpiament euclidians* amb $N\vec{v} \geq 0\ \forall\vec{v}$, on $N\vec{v} = \vec{v}.\vec{v}$ és la norma del vector $\vec{v}$, i tot el que exposem és vàlid també per als espais *impròpiament euclidians.*

En el cas d'un espai pròpiament euclidià amb una base ortonormal tindríem que $g_{ij} = \delta_{ij}$.

A través del canvi de base vectorial $\vec{e}'_i = A_i^j\vec{e}_j$, obtenim fàcilment les transformacions

$$x^j = A_i^j x'^i \qquad x'_k = A_k^i x_i$$
$$g'_{ij} = A_i^k A_j^m g_{km} \qquad g^{km} = A_i^k A_j^m g'^{ij}$$

Els $A_i^j$ defineixen la matriu $A$ i a través de $A^{-1}$ podrem obtenir les transformacions en sentit contrari.

Observem la diferent manera en què es transformen les expressions amb índexs superiors o inferiors. La generalització d'aquest fet ens porta al càlcul tensorial.

# TENSORS

A partir d'ara, quan tinguem índexs superiors parlarem d'índexs *contravariants* i amb els índexs inferiors parlarem d'índexs *covariants*. Un objecte matemàtic tal com

$$t_i{}^j{}_{kl}{}^m$$

direm que té el primer, tercer i quart índexs covariants i el segon i el cinquè índexs contravariants.

Un objecte com l'anterior direm que és un *tensor* amb tres índexs covariants i dos índexs contravariants, si davant del canvi de base vectorial ans esmentat es transforma segons la llei

$$t_i{}^j{}_{kl}{}^m = B_i^a A_b^j B_k^c B_l^d A_e^m t'_a{}^b{}_{cd}{}^e$$

, on $B_r^s$ són els elements de la matriu $B=A^{-1}$.

És immediat generalitzar tot l'anterior per a tensors amb un nombre diferent d'índexs.

La contracció d'un índex $k$ contravariant amb $g_{km}$ baixa l'índex $k$, tot convertint-lo en el $m$ covariant *conservant la mateixa posició.* El nou objecte és també un tensor.

La contracció d'un índex $r$ covariant amb $g^{rn}$ puja l'índex $r$, tot convertint-lo en el $n$ contravariant. L'índex *conserva la mateixa posició* i el nou objecte és també un tensor.

Degut al que hem dit parlarem, en general, dels diferents components contravariants-covariants d'un tensor.

La *contracció* dels índexs dels tensors, amb multiplicació o sense, dóna lloc *sempre* a un altre tensor.

En particular, $g_{ij}$ i $g^{ij}$ són tensors, ja que les seves transformacions són les corresponents a un tensor. Es verifica fàcilment que $g_{ij} = g_{ji}$ i $g^{ij} = g^{ji}$ , per la qual cosa l'ordre dels índexs no és rellevant en aquest tensor.

D'acord amb tot l'anterior, podem definir $g_i{}^j = g_{ia}.g^{aj}$, on també l'ordre dels dos índexs superior i inferior no és significatiu. Òbviament, $g_i{}^j = \delta_{ij}$. Si det $(g_{ij}) = g$, det $(g^{ij}) = 1/g$ i det $(g_i{}^j) = 1.$ Direm que les quantitats $g^{ij}$, $g_{ij}$ i $g_i{}^j$ són, respectivament, els components contravariants, covariants i mixtos d'un mateix tensor, anomenat *mètric o fonamental.*

Definirem *l'ordre* d'un tensor com el seu nombre d'índexs. Així direm que el tensor fonamental és d'ordre *2*, un vector és un tensor d'ordre *1* i un escalar és un tensor d'ordre *0*.

Sovint, per abús de llenguatge, parlarem d'un tensor referint-nos als seus components.

Si l'intercanvi de valors qualssevol de dos índexs concrets no canvia el valor dels components del tensor, direm que aquest tensor és simètric en relació a aquests dos índexs. Si l'anterior ocorre per a qualsevol parella d'índexs, direm que el tensor és completament simètric.

El tensor mètric és un exemple de tensor simètric.

Si l'intercanvi de valors qualssevol de dos índexs concrets transforma cada component del tensor en el seu valor oposat, direm que el tensor és antisimètric en relació a aquests dos índexs. Si l'anterior ocorre per a qualsevol parella d'índexs, direm que el tensor és completament antisimètric

És important tenir en compte que, si un tensor $t_{ij}$, per exemple, és simètric, l'ordre dels índexs dels components mixtos és irrellevant. Altrament, si $t_{ij}$ és antisimètric, caldrà distingir entre els components $t_i^{\ j}$ *i* $t^j_{\ i}$ .

Davant d'un canvi de base vectorial de matriu *A,* el determinant *g* canvia així: $g' = (\det A)^2 . g$ i, per tant, $\sqrt{g'} = |A| . \sqrt{g}$.

Els pseudotensors es transformen com a veritables tensors, si *det(A)>0.* Si *det(A)<0,* cal afegir un canvi de signe a la transformació final.

Definim el pseudotensor de *Levi-Civita* completament antisimètric, amb $dim(E_n)=n$,

$$\eta^{i_1 \dots i_n} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \varepsilon^{i_1 \dots i_n} \qquad \eta_{i_1 \dots i_n} = \sqrt{|g|} . \varepsilon_{i_1 \dots i_n}$$

, on els "components" del *símbol* $\varepsilon$ són iguals a zero, si dos dels índexs coincideixen, tenen el valor *1*, si la permutació $(i_1 \dots i_n)$ és parella en relació a la *(1...n),* o el valor *-1,* si la permutació anterior és senar. En la transformació tensorial dels components covariants de $\eta$ ens apareix *A*, en lloc de $|A|$, la qual cosa dóna lloc al seu caràcter pseudotensorial.

Les contraccions de tensors amb pseudotensors donen lloc a pseudotensors. El tensor *dual* d'un tensor *t* d'ordre $q \leq n$ completament antisimètric és un tensor *t'* obtingut a partir de la seva contracció *c* amb el tensor de *Levi-Civita* i és un pseudotensor:

$$t' = \frac{1}{q!} . c$$

Donats dos vectors de components $x^i$ i $y^j$, respectivament, podem definir el tensor antisimètric $t^{ij}=x^i y^j - x^j y^i$, anomenat *producte exterior.* El tensor dual del producte exterior és un pseudovector que coincideix amb el *producte vectorial* conegut. En les transformacions per inversió espacial *det(A)<0* i, per tant, els veritables vectors (o *vectors polars)* canvien el signe de tots els seus components, mentre que els pseudovectors (*o vectors axials)* romanen amb els components invariants.

# ESPAI DUAL

Una *forma lineal* $\alpha$ definida a l'espai vectorial $E_n$ fa correspondre a cada vector de $E_n$ un únic escalar i verifica

$$\alpha(\vec{x}+\vec{y}) = \alpha(\vec{x}) + \alpha(\vec{y}) \qquad \alpha(a.\vec{x}) = a.\alpha(\vec{x})$$

El conjunt $E_n^*$ de formes lineals de $E_n$ amb les operacions

$$(\alpha+\beta)(\vec{x}) = \alpha(\vec{x}) + \beta(\vec{x}) \qquad (a.\alpha)(\vec{x}) = a.\alpha(\vec{x})$$

té l'estructura d'espai vectorial i s'anomena *espai dual* de $E_n$.

A partir de $\alpha(\vec{x}) = \alpha(x^i.\vec{e}_i) = \alpha(\vec{e}_i).x^i$, és immediat veure que els $x^i$ són una base vectorial de l'espai dual. En notació diferencial les $dx^i$ seran la base vectorial de l'espai dual.

# PRODUCTE TENSORIAL

Si tenim un conjunt d'espais vectorials, podem definir un nou espai vectorial, anomenat *producte tensorial* d'aquells. En el producte tensorial $E_n \otimes E_n^* \otimes E_n^*$, per exemple, els seus elements s'expressen així:

$$x^h\vec{e}_h \otimes a_i dx^i \otimes b_j dx^j = x^h.a_i.b_j.\vec{e}_h \otimes dx^i \otimes dx^j$$

i és fàcil veure que, a partir d'un canvi de base vectorial a $E_n$, els components dels seus elements es transformen com un tensor una vegada contravariant i dues vegades covariant. En definitiva: tot el que hem dit sobre els tensors ho podem retrobar a partir del producte tensorial amb l'espai $E_n$ i el seu dual.

El subconjunt $A_{ext}$ dels tensores completament antisimètrics de $E_n^* \otimes ...k... \otimes E_n^* = (E_n^*)^k$ constitueix l'*àlgebra exterior* de les *k-formes* i qualsevol element de $A_{ext}$ es podrà expressar així:

$$t^{r....s}.dx^r \otimes ... \otimes dx^s = t^{i...j}.\sum_P sgn(P)(dx^{Pi} \otimes ... \otimes dx^{Pj}) \quad amb \quad i < ... < j$$

, on *sgn(P)* val *+1* o *-1* segons que la permutació *P* sigui parella o senar en relació a la *i...j.* La dimensió de $A_{ext}$ és, doncs, $C_n^k$.

Arribem finalment a les conclusions següents:

a) Si considerem, respectivament, els escalars i les formes lineals com a *0*-formes i *1*-formes, amb les definicions $a \wedge \alpha = a.\alpha$, $\alpha \wedge \beta = (\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha)$, l'associativitat de $\wedge$ i la distributivitat de $\wedge$/+ podem trobar els elements $\alpha \wedge \beta \wedge ... \wedge \gamma$. Amb els generadores bàsics de les *1*-formes es verifica $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ i $\alpha \wedge \alpha = 0$, amb la qual cosa s'obté l'estructura d'àlgebra de *Grassmann*. A través, doncs, del producte $\wedge$ obtenim una *àlgebra graduada* amb formes de tots els ordres i $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$ generadors en total.

b) Definim la *diferencial exterior* d'una *r*-forma com a la *(r+1)*-forma obtinguda així:

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_r} \omega_{i_1\ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} \quad d\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_r} \sum_{\alpha=1}^{n} \partial_\alpha \omega_{i_1\ldots i_r} . dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$$

Amb la incorporació de la diferencial exterior tenim una *àlgebra diferencial de Cartan*.

# ESPAIS PUNTUALS AFINS EUCLIDIANS

Treballarem amb l'espai geomètric $\mathcal{E}_n$ de punts al qual li adjuntem un espai vectorial euclidià $E_n$ de la forma convencional coneguda. Això ens permetrà l'estudi afí i mètric de l'espai geomètric que ara anomenarem *espai puntual afí euclidià.*

Siguin $M(x^i)$ i $N(x^i+dx^i)$ dos punts infinitament propers del nostre espai i $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ una base vectorial de l'espai vectorial adjunt. Definim $ds^2$ com la norma del vector d'origen *M* i extrem *N*

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

i aquesta expressió s'anomena *mètrica* de l'espai puntual.

Amb les coordenades $(x^1,\ldots,x^n)$ d'un punt podem realitzar la transformació $x^i = x^i(y^1,\ldots,y^n)$ de tal manera que existeixi una bijecció entre dos dominis *D i D'* determinats pels conjunts $x^i$, $y^i$. L'anterior implica que el *jacobià* de la transformació verifiqui

$$D(x^1,\ldots,x^n) / D(y^1,\ldots,y^n) = \det(\partial x^i / \partial y^j) \neq 0$$

Aleshores el nostre espai ha estat descrit pel *sistema de coordenades curvilínies* $y^j$.

Donat un punt *M* de l'espai afí, podem trobar les corbes que passin per *M* i al llarg de les quals *només* variï una coordenada curvilínia. Aquestes corbes s'anomenen *corbes coordenades* del punt *M.* Per simplicitat representarem per $\vec{M}$ el vector que té per origen l'origen de coordenades i per extrem el punt *M.*

A partir de cada corba coordenada podem definir els vectors

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{M}}{\partial y^i} \quad \text{que verifiquen} \quad d\vec{M} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial y^i} dy^i$$

Aquests *n* vectors són linealment independents, perquè

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{M}}{\partial y^i} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial y^i} = \vec{v}_j . \frac{\partial x^j}{\partial y^i}$$

, on els $\vec{v}_j$ són els vectors de la base vectorial corresponent als components $x^j$ i el determinant de la matriu de la transformació vectorial és el jacobià no nul. Per tant, l'anterior conjunt de vectors és una base vectorial o *sistema natural* del sistema de coordenades curvilínies associat al punt *M*.

La diferència essencial entre un sistema de coordenades *rectilínies* i un de curvilínies està que la base vectorial amb coordenades curvilínies *depèn del punt M*, en general, mentre que la base vectorial corresponent a les coordenades $x^i$ roman constant. A partir d'ara, si no es diu el contrari, només parlarem de coordenades curvilínies, de les quals les coordenades rectilínies són un cas particular.

Definirem *camps de tensors* associats a cada punt *M* i suposarem expressats els seus components *a partir de la base vectorial natural del punt.*

Amb un canvi de coordenades curvilínies $y'^i = y'^i(y^1,...,y^n)$ tindrem que

$$\vec{e}'_i = \frac{\partial \vec{M}}{\partial y'^i} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial y'^i} \quad i, \text{ definint } A_i^k = \frac{\partial y^k}{\partial y'^i}, \quad \vec{e}'_i = A_i^k . \vec{e}_k$$

Per tant, podem saber com es transformen els tensors del camp a partir del canvi de base vectorial anterior.

En particular, la mètrica serà $ds^2 = g_{ij}dy^i dy^j$, on $g_{ij}$ és el tensor mètric expressat en el sistema natural. El conjunt dels $g_{ij}$ constitueix un exemple de camp de tensors.

Finalment, el volum $d\Omega$ del paral·lelepípede determinat per les arestes $dy^1,...,dy^n$ s'obté amb l'expressió $d\Omega = \sqrt{|g|}.dy^1 ... dy^n$, que és un invariant davant d'un canvi de base vectorial.

# DIFERENCIAL ABSOLUTA D'UN TENSOR

A partir de la relació entre les coordenades cartesianes i polars a l'espai euclidià $R^2$, $x=r.\cos\Phi$ i $y=r.\sin\Phi$, obtenim els canvis de base vectorial i de components d'un vector $\vec{A}$:

$$\vec{e}_r = \cos\Phi.\vec{e}_x + \sin\Phi.\vec{e}_y \quad \vec{e}_\Phi = -r.\sin\Phi.\vec{e}_x + r.\cos\Phi.\vec{e}_y$$

$$A^r = \cos\Phi.A^x + \sin\Phi.A^y \quad A^\Phi = \frac{1}{r}(-\sin\Phi.A^x + \cos\Phi.A^y)$$

Els components d'un vector en la base vectorial local del punt $M$ variaran si les expressem en la base vectorial local de $M+dM$ degut al canvi de la base vectorial local $\vec{e}_r, \vec{e}_\Phi$:

$$\delta A^r = -\sin\Phi.A^x.d\Phi + \cos\Phi.A^y.d\Phi = rA^\Phi.d\Phi$$

$$\delta A^\Phi = -\frac{1}{r^2}.(-\sin\Phi.A^x + \cos\Phi.A^y).dr - \frac{1}{r}(\cos\Phi.A^x + \sin\Phi.A^y).d\Phi =$$

$$= -\frac{1}{r}.A^\Phi.dr - \frac{1}{r}.A^r.d\Phi$$

Les transformacions anteriors ens donen el canvi de components d'un vector per *transport paral·lel* i que en general escriuríem així:

$$\delta A^i = -\Gamma^i_{kl}.A^k.dy^l$$

A partir d'ara empraré la nomenclatura següent:

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = f_{,i} \qquad \frac{\partial t^{ij}}{y^k} = t^{ij}_{,k} \dots$$

Si tenim un camp vectorial $A^i$, el canvi *"real"* $\nabla$ de components expressat en la base local de $M+dM$ i anomenat *diferencial absoluta* o *connexió* s'obtindrà a partir de la diferència entre les del vector en $M+dM$ i les del vector transportat a $M+dM$ des de $M$:

$$\nabla A^\alpha = A^\alpha_{;\beta} dy^\beta, \text{ on } A^\alpha_{;\beta} = \nabla_\beta A^\alpha = A^\alpha_{,\beta} + A^\mu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}$$

Quan el valor anterior és nul direm que el camp vectorial s'ha generat per transport paral·lel entre $M$ i $M+dM$.

Si substituïm les diferencials $dy^\beta$, components d'un vector infinitesimal, pels components $V^\beta$ d'un vector que li sigui paral·lel obtenim l'operador $\nabla_{\vec{v}}$ anomenat *connexió en la direcció* $\vec{v}$.

La diferencial absoluta de qualsevol tensor haurà de tenir en compte el transport paral·lel corresponent i és un tensor.

Si $\Phi$ és un camp escalar, el transport paral·lel no té cap efecte en ell: $\nabla\Phi = \Phi_{,\alpha}.dy^{\alpha}$ i les $\Phi_{,\alpha}$ són els components covariants d'un vector.

L'operador $\nabla$ verificarà les propietats convencionals de la derivació amb $\nabla(a.T+b.Q)=a.\nabla T+b.\nabla Q$ *i* $\nabla(T.Q)= (\nabla T).Q+T.\nabla Q)$, *on la multiplicació s'ha d'interpretat tensorialment amb contracció o no d'índexs.*

Si obtenim un camp escalar a partir de la multiplicació tensorial amb contracció d'índexs i tenim en compte que $\nabla\Phi = \Phi_{,\alpha}.dy^{\alpha}$ és fàcil arribar a aquestes conclusions:

$$\nabla v_{\alpha} = v_{\alpha;\beta}dy^{\beta} \quad v_{\alpha;\beta} = v_{\alpha,\beta} - v_{\mu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$$

$$\nabla t^{\mu}_{\nu} = t^{\mu}_{\nu;\beta}dy^{\beta} \quad t^{\mu}_{\nu;\beta} = t^{\mu}_{\nu,\beta} + t^{\alpha}_{\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} - t^{\mu}_{\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta}$$

$$\nabla t_{\mu\nu} = t_{\mu\nu;\beta}dy^{\beta} \quad t_{\mu\nu;\beta} = t_{\mu\nu,\beta} - t_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} - t_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta}$$

$$\nabla t^{\mu\nu} = t^{\mu\nu}_{;\beta}dy^{\beta} \quad t^{\mu\nu}_{;\beta} = t^{\mu\nu}_{,\beta} + t^{\alpha\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + t^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}$$

$\nabla_{\beta}$ i ";" defineixen la *derivada covariant* d'un tensor i augmenten en *1* el seu nombre d'índexs covariants. Altrament, les derivades parcials (en general) i els "$\Gamma$" no són pas tensors.

Els símbols $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ s'anomenen *símbols de Christoffel* i valen

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu})$$

*És immediat comprovar que els símbols de Christoffel són simètrics en relació als dos índexs inferiors i que les diferencials absolutes i les derivades covariants del tensor mètric són nul·les.* Amb aquests dos criteris definirem posteriorment *la connexió riemanniana d'un espai de Riemann*.

Contràriament a la diferencial absoluta, la diferencial ordinària no és un tensor ja que només ens indica el canvi infinitesimal dels components, *referits a bases locals diferents* i, per tant, no té cap significació vectorial precisa.

A partir de l'expressió de la mètrica $ds^2 = dr^2 + r^2.d\theta^2$ en coordenades polars es poden trobar els valors dels símbols de *Christoffel* i de les variacions dels components d'un vector per transport paral·lel, que havíem vist inicialment.

És important remarcar que la mètrica anterior és la mètrica d'un espai pla en coordenades curvilínies i que *desfent el canvi retrobaríem el tensor mètric en coordenades rectilínies.*

Donada, però, una mètrica arbitrària, podem considerar-la com a derivada d'una mètrica euclidiana convencional a través d'un canvi de coordenades? Això no és sempre possible, com veurem més endavant en estudiar els espais de *Riemann.*

# VECTOR ACCELERACIÓ

A l'espai afí podem tenir un punt *M* amb les seves coordenades dependents d'un paràmetre *t.* Interpretant *t* com el temps, tindrem el vector velocitat

$$u^{\alpha} = \frac{d\vec{M}}{dt} \text{ amb components } u^{\alpha} = \frac{dy^{\alpha}}{dt}$$

El vector acceleració tindrà com a components $\nabla u^{\alpha} / dt$ .

Si $ds^2>0$, el paràmetre pot ser el valor finit *s,* obtingut a partir de la mètrica, i amb una acceleració nul·la trobarem les equacions diferencials que verifiquen *els punts d'una recta:*

$$\frac{d^2y^{\alpha}}{ds^2} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{dy^{\beta}}{ds}.\frac{dy^{\gamma}}{ds} = 0$$

L'equació anterior és equivalent a

$$\nabla_{\vec{u}}\,\vec{u} = u^{\alpha}_{;\beta}.u^{\beta} = 0$$

# OPERADORS DIFERENCIALS

Els operadors diferencials coneguts, que intervenen en els teoremes d'integració de *Gauss* i de *Stokes*, poden definir-se de forma compacta i independent del sistema de referència amb l'ajut del càlcul tensorial:

*a) Gradient* $\nabla_{\alpha}\varphi$ *d'un camp escalar* $\varphi : \nabla_{\alpha}\varphi = \varphi_{,\alpha}$

*b) Rotacional d'un camp vectorial*: $V_{i,j}-V_{j,i}$ són els components covariants d'un tensor antisimètric $rot_{ij}$ anomenat *tensor rotacional.* El seu tensor dual és el *vector rotacional.*

*c) Divergència d'un camp de vectors:* $div\ \vec{v} = v^{\alpha}_{;\alpha}$

*d) Laplaciana d'un camp escalar:* $\Delta\varphi = div(grad\ \varphi)$

# ESPAIS DE RIEMANN

Fins ara hem tractat únicament amb espais afins euclidians. La imatge més senzilla d'aquests espais és la del pla $R^2$ o la de l'espai $R^3$. Degut al caràcter euclidià de $R^2$, s'acostuma anomenar-los espais *plans.*

La mètrica d'un espai afí euclidià en coordenades curvilínies

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$$

*pot sempre transformar-se* mitjançant el canvi adient de les coordenades en la mètrica euclidiana en coordenades rectilínies.

Sigui ara una varietat $V_n$ on cada punt ve donat per les $n$ coordenades $y^\alpha$, sense cap restricció en les propietats degudes a la continuïtat i a la derivació. Suposarem que, lligada a la varietat, tenim la mètrica

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$$

Ens fem ara novament la pregunta que ja ens plantejàvem amb anterioritat: Podem a través d'un canvi de coordenades transformar aquesta mètrica en una altra amb els coeficients constants? Això no és sempre possible. Si ho és, l'espai serà euclidià. Altrament, serà *un espai de Riemann*.

A continuació veurem les propietats més importants dels espais de *Riemann*, sense donar-ne, però, les demostracions:

1-Sempre és possible trobar una mètrica euclidiana $\overline{g}_{\alpha\beta}$ de manera que en un punt $O$ es verifiqui

$$(\overline{g}_{\alpha\beta})_O = (g_{\alpha\beta})_O \qquad (\overline{g}_{\alpha\beta,\gamma})_O = (g_{\alpha\beta,\gamma})_O$$

, independentment de les coordenades elegides.

Aquesta mètrica euclidiana diem que és osculatriu a la mètrica riemanniana en el punt $O$ i coincideix amb ella en un entorn de $O$ amb una aproximació de primer ordre.

2-Com a conseqüència de l'anterior, podrem trobar un canvi de coordenades a $V_n$ perquè els coeficients de la mètrica tinguin valors prefixats i verifiquin que totes les seves primeres derivades siguin nul·les en un punt. Això equival a tenir una representació euclidiana osculatriu en $O$ en coordenades rectilínies.

3-Com establir una connexió $\nabla$ a $V_n$ que ens permeti definir els canvis reals i, en definitiva, la diferencial absoluta d'un tensor? Es demostra que si a $V_n$ imposem les condicions que $\nabla$ compleix en un espai euclidià, a) $\Gamma^{i}{}_{kl} = \Gamma^{i}{}_{lk}$ i b) $g_{ik;l} = 0$, aquesta connexió existeix i és única: es tracta de la *connexió riemanniana*.

Si definim el *tensor de torsió* $\tau$ que verifica

$$(\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha)\Psi = \tau_{\alpha\beta}{}^{\gamma}.\nabla_\gamma\Psi$$

, on $\Psi$ és una funció, es comprova que les dues condicions anteriors són equivalents a aquestes: a) $\Gamma^{i}{}_{kl} = \Gamma^{i}{}_{lk}$ i b) $\tau=0$. Podem tenir altres tipus de connexions. Tanmateix, a partir d'ara només tindrem en compte la connexió riemanniana.

Per tot el que hem anat dient, definirem en cada punt de $V_n$ la connexió riemanniana equivalent a la de la mètrica euclidiana osculatriu amb totes les propietats que abans hem vist, degut que en aquesta només intervenen *els valors de la mètrica i de les seves primeres derivades.*

4-Podem tenir camps de tensors que variaran els seus components per un canvi de coordenades d'anàloga manera com ho farien a l'espai euclidià osculatriu corresponent a cada punt.

5-En un espai euclidià l'equipol·lència o transport paral·lel infinitesimal d'un camp vectorial venia donada per la condició

$$\nabla v^{\alpha} = v^{\alpha}_{;\beta}.dy^{\beta} = 0$$

Si el desplaçament es feia al llarg d'una corba definida pel paràmetre $\lambda$, podríem obtenir el vector tangent

$$u^{\alpha} = dy^{\alpha} / d\lambda$$

i aleshores l'equipol·lència d'un camp vectorial verifica

$$\nabla_{\vec{u}}\vec{v} = v^{\alpha}_{;\beta}.u^{\beta} = 0$$

6-A l'espai euclidià les rectes apareixien amb l'anul·lació de l'acceleració, la qual cosa equivalia a

$$\nabla_{\vec{u}}\,\vec{u} = u^{\alpha}_{;\beta}.u^{\beta} = 0$$

A l'espai de *Riemann* les corbes que compleixen aquesta condició s'anomenen *geodèsiques* i en elles *el vector tangent es transporta paral·lelament.* Les equacions diferencials de les geodèsiques seran les mateixes que les obtingudes per a les rectes dels espais euclidians. *Una corba geodèsica d'un espai de Riemann correspon localment a una recta de l'espai euclidià que és osculatriu en el punt considerat*.

7-Si fins ara tots els càlculs a $V_n$ són una extensió dels realitzats a l'espai euclidià, on rau la diferència entre ambdós tipus d'espais? La diferència està en el *tensor de curvatura* que hi intervé quan tractem problemes *globals, no locals.*

# CURVATURA D'UN ESPAI DE RIEMANN

Si fem un transport paral·lel d'un vector des d'*A* a *B* al llarg de dues corbes diferents $c_1$ i $c_2$, obtindrem el mateix vector final?

La resposta a la pregunta anterior depèn del valor del *tensor de Riemann-Christoffel* $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ que és antisimètric en els índexs $\gamma$ i $\delta$ i que es defineix a partir d'aquestes relacions equivalents:

$$\left[\nabla_\delta \nabla_\gamma - \nabla_\gamma \nabla_\delta\right] A^\alpha = R^\alpha_{\beta\gamma\delta} A^\beta \; R^\alpha_{\beta\gamma\delta} B^\gamma C^\delta A^\beta = \left[\nabla_{\vec{B}} \nabla_{\vec{C}} - \nabla_{\vec{C}} \nabla_{\vec{B}}\right] A^\alpha - \nabla_{\left[\vec{B},\vec{C}\right]} A^\alpha$$

$$\nabla_{\left[\vec{B},\vec{C}\right]} A^\alpha = (\nabla_{\vec{B}} C^\nu - \nabla_{\vec{C}} B^\nu) \nabla_\nu A^\alpha = (B^\mu \nabla_\mu C^\nu - C^\mu \nabla_\mu B^\nu) \nabla_\nu A^\alpha = L^\nu_{\vec{B}} \vec{C} \nabla_\nu A^\alpha$$

, on *L* és la *derivada de Lie* de $\vec{C}$ al llarg de $\vec{B}$ i es troba mitjançant *parèntesi de Lie* dels dos vectors.

Finalment, arribem a la relació que permet calcular el tensor de *Riemann-Christoffel*:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}_{\delta\beta,\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta,\delta} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}\Gamma^{\varepsilon}_{\delta\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\delta\varepsilon}\Gamma^{\varepsilon}_{\gamma\beta}$$

En un espai euclidià el tensor de *Riemann-Christoffel* és nul i obtenim el mateix vector final a través del seu transport paral·lel per dos camins diferents. En un espai de *Riemann* aquell tensor no és nul i el vector final depèn de la trajectòria que hem seguit. Aquí apareix la diferència bàsica entre un espai euclidià i un espai riemannià, perquè el tensor de *Riemann-Christoffel* depèn de les segones derivades del tensor mètric a través dels símbols de *Christoffel* i l'equivalència local acaba en les derivades primeres.

El tensor de *Riemann-Christoffel* verifica les *identitats de Bianchi*

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta;\varepsilon} + R^{\alpha}{}_{\beta\delta\varepsilon;\gamma} + R^{\alpha}{}_{\beta\varepsilon\gamma;\delta} = 0$$

A partir del tensor anterior obtenim el tensor simètric de *Ricci*

$$R_{\alpha\beta} = R^{\gamma}{}_{\alpha\gamma\delta}$$

i l'escalar *curvatura riemanniana*

$$R = R^{\alpha}_{\alpha}$$

Quan aquí parlem de curvatura parlem de la curvatura *intrínseca.* La curvatura intrínseca és diferent de la curvatura *extrínseca* que marca la pertinença de la nostra varietat riemanniana a un altre espai de major nombre de dimensions. Les superfícies esfèrica i cilíndrica posseeixen curvatura extrínseca i es troben immerses a l'espai euclidià $R^3$. Un observador *extern* a elles, però situat a $R^3$, podria visualitzar la seva curvatura extrínseca. Per al càlcul de la curvatura intrínseca *no cal sortir* de la varietat, amb mesures locals hom podria detectar-la.

La superfície cilíndrica, però, no té curvatura intrínseca. Dibuixant localment un triangle a través de tres geodèsiques (extremals de la longitud entre dos punts) veuríem que la suma dels seus tres angles seria de 180º (només cal fer el desenvolupament pla de la superfície cilíndrica per comprovar-ho).

Altrament, la superfície esfèrica té curvatura intrínseca i localment comprovaríem que la suma dels angles d'un triangle, construït amb tres circumferències màximes, és superior a 180º.

Per calcular la curvatura intrínseca només cal conèixer la mètrica expressada en funció de les coordenades internes. Per al càlcul de la curvatura extrínseca, però, cal saber la relació que hi ha entre les coordenades internes i les coordenades del punt pròpies de l'espai superior en què la varietat està immersa.

Si la curvatura riemanniana no és nul·la, tampoc ho és la curvatura extrínseca en un *possible* espai de dimensió superior.

Finalment, definim el tensor d'*Einstein*

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(R + \lambda)$$

, que verifica

$$G^{\alpha\beta}_{;\beta} = 0$$

Observem que el tensor energia-impuls, definit al capítol 4, compleix la mateixa propietat. Aquesta coincidència serà essencial per a l'estudi de la gravitació.

# ESPAIS TOPOLÒGICS

La finalitat essencial de la *topologia* és l'estudi dels invariants davant d'*homeomorfismes* o aplicacions bijectives i contínues en ambdós sentits entre espais topològics (un *difeomorfisme* és un homeomorfisme infinitament diferenciable en ambdós sentits). Les definicions i conceptes topològics que seguiran ens ajudaran a comprendre millor les propietats relacionades amb l'estructura geomètrica de l'espaitemps i amb la representació de grups.

Una estructura *topològica* sobre un conjunt $X$ està definida a través de l'existència d'una família de subconjunts de $X$, anomenats *oberts*, que satisfan els axiomes següents:

1-El conjunt buit i $X$ són oberts.

2-La reunió d'oberts és un obert.

3-La intersecció d'un nombre *finit* d'oberts és un obert.

La topologia és *separable* o *de Haussdorf*, si verifica també:

4- $\forall x \in X$ i $\forall y \in X$ ( $x \neq y$ ) existeixen dos oberts disjunts que contenen $x$ i $y$, respectivament.

Un *entorn obert* d'un punt és un conjunt obert que el conté.

Un conjunt és *tancat*, si és el complementari d'un d'obert.

Una *base* topològica és una família d'oberts que per reunió pot donar qualsevol altre obert.

Un conjunt d'oberts és un *recobriment* de $X$, si la unió d'ells és igual a $X$.

Un espai topològic $X$ és *compacte*, si tot recobriment conté un subconjunt finit d'oberts que sigui també recobriment de $X$.

Un conjunt $X$ és *connex*, si no és la unió disjunta de dos conjunts oberts no buits.

Un subconjunt $Y$ d'un espai topològic $X$ és un subespai topològic d'aquest, si posseeix la topologia induïda en la qual els seus oberts són les interseccions amb $Y$ dels oberts de $X$. Un punt de $Y$ és *interior* a $Y$ si hi ha un entorn seu a $X$ amb tots els punts pertanyents a $Y$; altrament tenim un punt *frontera*.

Tot subespai d'un espai topològic separable és separable.

En particular, $R^n$ és un espai topològic separable on podem definir funcions $R^n$->$R$. Tot subconjunt $V_n$ de $R^n$ on els punts tinguin *n coordenades essencials sense cap relació funcional entre elles* serà també un espai topològic separable amb la topologia i el conjunt de funcions induïts. $V_n$ s'anomena *varietat de* $R^n$ *de n dimensions.* A $R^n$ podem fàcilment definir l'estructura d'*espai mètric* i d'aquí permetre els conceptes de distància, límit i continuïtat.

Concretant el concepte d'espai topològic compacte a una varietat $V_n$ de $R^n$, són equivalents les tres afirmacions següents:

a) $V_n$ és compacte.

b) $V_n$ és *tancat i fitat*.

c) Tot subconjunt infinit de $V_n$ té un punt d'acumulació a $V_n$ i a partir de qualsevol successió a $V_n$ podem sempre extreure una successió parcial que sigui de *Cauchy* i tingui obligatòriament límit en $V_n$ (*conjunt complet*).

El teorema fonamental del càlcul exterior de *Cartan* diu que

$$\int_{\sigma} d\alpha = \int_{\partial\sigma} \alpha$$

, on $\sigma$ és una regió compacta de $k+1$ dimensions i $\partial\sigma$ la seva frontera $k$-dimensional. L'expressió subintegral $\alpha = f.dx^i \wedge ... \wedge dx^j$ és una $p$-forma, $d\alpha$ la seva derivada exterior, cal interpretar formalment les integracions en el sentit de *Riemann* d'acord amb la substitució $dx^i \wedge ... \wedge dx^j \rightarrow dx^i ... dx^j$ i per a les integracions s'han de tenir en compte les *orientacions* adients de les varietats. El teoremes de *Gauss* i de *Stokes* són un cas particular d'aquell teorema, com es pot comprovar fàcilment.

# TOPOLOGIA ALGEBRAICA

Les varietats de variable complexa de dimensió $k$ ens permeten l'estudi topològic de varietats reals de dimensió $2k$. Les generalitzacions, amb un major nombre de dimensions, de les superfícies $w=w(z)$ unidimensionals complexes de *Riemann* i de les equacions de *Cauchy-Riemann* que garanteixen que $w(z)$ sigui derivable independentment de la direcció de $\Delta z$ són un bon ajut per a l'estudi topològic de determinades varietats reals. Tanmateix, és mitjançant la *topologia algebraica* que podem avançar-hi amb més profunditat. La *topologia algebraica* té per objectiu facilitar l'estudi de les propietats topològiques (*topologia conjuntista*) a partir del coneixement de les propietats algebraiques dels grups assignats als espais topològics. En dos espais topològics homeomorfos els seus grups algebraics són isomorfos.

Un *camí* o *arc* dins d'un espai topològic $X$ és una aplicació contínua de l'interval $I=[0,1]$ en $X$. Les imatges de $0$ i $1$ s'anomenen origen $o_f$ i extrem $e_f$ del camí $f$. Davant de transformacions contínues entre camins que tinguin el mateix origen i el mateix extrem, obtenim una relació d'equivalència entre camins.

Si dos punts qualssevol de l'espai topològic poden unir-se mitjançant un camí, diem que l'espai topològic és *arc-connex*. Un conjunt arc-connex és connex, però el recíproc és fals.

Podem definir la composició de dos camins $f$ i $g$ on l'extrem $e_f$ de $f$ coincideixi amb l'origen $o_g$ de $g$ de manera que obtinguem un nou camí que tingui per origen $o_f$ i per extrem $e_g$. A partir d'aquí obtindrem l'operació corresponent dins del conjunt quocient, independentment de la classe d'equivalència elegida.

En particular, podem definir per a cada punt $P$ de $X$ el conjunt quocient de camins tancats en què l'extrem i l'origen coincideixen en $P$. Amb la composició de classes el conjunt de classes de camins té l'estructura de grup: *el grup fonamental* o *grup d'homotopia d'ordre 1* de l'espai topològic corresponent al punt $P$.

Dues aplicacions $f$ i $g$ contínues entre els espais topològics $X$ i $Y$ són homotòpicament equivalents i escriurem $f \approx g$, si existeix una aplicació contínua $\gamma$ entre $X x I$ i $Y$ que verifiqui

$$\forall x \in X \quad \gamma(x,0) = f(x) \quad \gamma(x,1) = g(x)$$

Sovint la propietat d'homeomorfisme és massa forta i se substitueix per la més feble d'equivalència homotòpica: dos espais topològics $X$ i $Y$ són *homotòpicament equivalents*, si existeixen aplicacions contínues, $f:X\text{->}Y$ i $g:Y\text{->}X$, amb $fog \approx I$ i $gof \approx I$. Òbviament dos espais topològics homeomorfs són homotòpicament equivalents, però el recíproc no és cert. Les aplicacions $f$ i $g$ anteriors s'anomenen *equivalències homotòpiques*. Una equivalència homotòpica entre espais topològics indueix un isomorfisme entre els grups fonamentals.

Generalitzant el concepte de camí a partir d'una aplicació contínua entre el paral·lelepípede $I^n$ i $X$, podem definir *el grup* *d'homotopia d'ordre n*. L'estudi complet dels diferents grups d'homotopia és, però, difícil, en general.

Per entendre a grans trets de què tracta l'*homologia,* donem a continuació, sense aprofundir-los, uns conceptes intuïtius:

*Politop*: subconjunt d'un espai euclidià construït amb elements rectilinis (polígons, políedres,...).

*m-símplex:* politop construït amb $m+1$ punts independents. Així, un triangle és un *2*-símplex i un tetràedre un *3*-símplex.

*Complex de símplexs orientat K*: conjunt de símplexs correctament units on en cada $m$-símplex $\sigma^m$ la permutació parella o senar dels $m+1$ punts que el generen fixa la seva orientació +,-.

*Cadena m-dimensional en el complex de símplexs orientat K sobre el grup abelià G*: és una funció $c_m$ entre el conjunt de $m$-símplexs orientats $\sigma^m$ de $K$ i $G$ que verifica $c_m(\sigma^m)=-c_m(-\sigma^m)$. A més, si $K$ és infinit $c_m(\sigma^m)=0$ excepte per a un nombre finit dels $m$-símplexs (*).

*Grup $C_m(K,G)$:* és el grup abelià de cadenes $m$-dimensionals amb l'operació $(c_m^1 + c_m^2)(\sigma^m) = c_m^1(\sigma^m) + c_m^2(\sigma^m)$.

*Grup d'homologia:* A partir de $C_m(K,G)$ i dels seus subgrups és defineix de forma no trivial el *grup d'homologia* $H_m(K,G)$.

*Cocadenes i grups de cohomologia*: Si no imposem la condició (*), tenim una *cocadena* i *un grup de cohomologia.*

L'*homologia* ens ajuda a l'estudi topològic de *conjunts homeomorfos amb politops* i a la solució de les dificultats que trobem en l'homotopia. En efecte: els grups d'homologia i de cohomologia no estan assignats a cap punt en concret i, a més, són sempre abelians, amb la qual cosa l'estructura algebraica adjunta és més senzilla que la corresponent a la de l'homotopia. D'aquesta manera podem arribar a molts resultats en què l'homotopia es troba amb dificultats: és el que passa, per exemple, amb el *teorema del punt fix de Brouwer,* que afirma que per a tota aplicació contínua $f:X\to X$ amb

$$X = \left\{x \in R^n , |x| \le 1\right\}$$

hi ha un punt $x$ en què $f(x)=x$, amb el de la "*bola peluda*", que en la seva expressió més senzilla ens diu que un camp vectorial diferenciable tangent a una esfera bidimensional s'anul·la al menys en un punt, i amb el *teorema fonamental de l'àlgebra.*