APÈNDIX 3: GRUPS DE LIE

GRUPS

Se suposa que el lector coneix el concepte de grup i les seves propietats essencials.

Un subgrup H de G direm que és un subgrup *invariant,* si $\forall h \in H$ i $\forall x \in G \exists h' \in H | h'.x = x.h$.

Un grup que no admeti subgrups invariants (amb l'excepció dels trivials G i $\{e\}$) s'anomena *simple.*

Un grup *semisimple* no conté subgrups invariants abelians no trivials. Òbviament tot grup simple és semisimple.

Un grup pot ser *finit* (si conté un nombre finit d'elements) o *infinit* (en cas contrari). A continuació donarem uns exemples de grups infinits que resultaran essencials en tot el que seguirà d'ara endavant:

->*O(n)* és el conjunt de matrius *M reals* i *ortogonals nxn* (la matriu inversa d'una matriu coincideix amb la seva matriu transposada). Es verifica que $det(M)=\pm 1$. *O(3)* conté les rotacions convencionals a l'espai i la inversió espacial.

->*SO(n)* és el subconjunt de matrius *M* de *O(n)* en què *det(M)=+1. SO(3)* conté només les rotacions espacials.

->*U(n)* és el conjunt de matrius unitàries *nxn.*

->*SU(n)* és el subconjunt de matrius *M* de *U(n)* en les quals *det(M)=+1.*

->*GL(n,C)* és el conjunt de matrius *nxn* representatives de les transformacions lineals C^n->C^n.

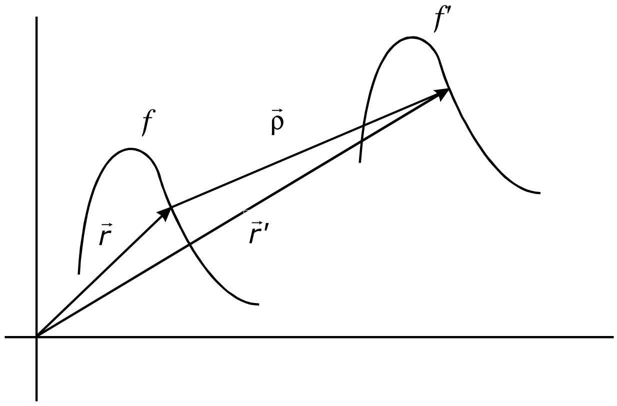
->*SL(n,C)* és el subconjunt de matrius *M* de *GL(n,C)* en què *det(M)=+1.*

->*GL(n)* és el conjunt de matrius *reals nxn* representatives de les transformacions lineals R^n->R^n.

->*SL(n)* és el subconjunt de matrius *M* de *GL(n)* en les quals *det(M)=+1.*

Un grup infinit serà *continu,* si es pot establir una bijecció entre els seus elements i una varietat V_n de R^n (*varietat del grup o "group manifold"*) de tal manera que els punts de la varietat puguin variar de forma *contínua.* Diem que tenim un grup continu amb *n* paràmetres o de *dimensió n*. Els grups de *Lie,* que veurem més endavant, són grups continus. En concret, definirem un grup de *Lie* com a *simple,* si no admet subgrups *de Lie* invariants, i com a *semisimple*, si no conté subgrups *de Lie* invariants abelians (en ambdues definicions ens referim a subgrups no trivials, òbviament). La topologia de la varietat V_n del grup de *Lie* s'estén al grup. Així, direm que un grup de *Lie* és compacte, connex, etc., si ho és la seva varietat. A continuació veurem uns quants exemples de grups de *Lie* que ens ajudaran a la comprensió del concepte de grup continu.

TRANSLACIONS ESPACIALS



D'acord amb la figura anterior, realitzem una *translació activa* d'una funció $f(\vec{r})$ amb desplaçament $\vec{\rho}$. La funció *f′* verificarà $f'(\vec{r}+\vec{\rho}) = f(\vec{r})$ o bé $f'(\vec{r}) = f(\vec{r}-\vec{\rho})$.

Mitjançant un desenvolupament de *Taylor* i fent $\vec{p} = -i\hbar\nabla$, arribem a

$$f'(\vec{r}) = exp(-i\vec{\rho}.\vec{p}/\hbar)f(\vec{r})$$

Si anomenem $\vec{\alpha} = -\vec{p}/\hbar$, obtenim $U_r(\vec{\alpha}) = exp(i\vec{\alpha}.\vec{p})$.
$U_r(\vec{\alpha})$ és *l'operador translació,* que verifica

$$f'(\vec{r}) = U_r(\vec{\alpha})f(\vec{r})$$

Donat que l'operador $\vec{p}$ és hermític, U_r serà unitari.

El conjunt d'operadors $U_r(\vec{\alpha}) = U_r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ és un grup G que està parametritzat amb $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in R^3$ i podem establir la *bijecció* entre el conjunt d'operadors i el conjunt de punts de R^3. El punt de R^3 pot variar de forma *contínua*. Es verifica de forma trivial que $U_r(\vec{\alpha}).U_r(\vec{\beta}) = U_r(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$. Per tot el que acabem de dir, veurem més endavant que G és un *grup de Lie* amb tres paràmetres o *de dimensió 3.* El subconjunt de R^3 que podem posar en correspondència amb G és en aquest cas el propi R^3 (*"group manifold" o varietat del grup de Lie*).

Els operadors p_i són els *generadors* del grup que defineixen els elements $U_r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = exp(i(\alpha_1.p_1 + \alpha_2.p_2 + \alpha_3.p_3))$.

Els generadors verifiquen *l'àlgebra de Lie* $[p_i,p_j]=0$. Els tres generadors commuten entre ells i diem que el *rang* de l'àlgebra és igual a *3*.

El grup de translacions és abelià. Per tant tot subgrup serà invariant i G no serà ni simple ni semisimple.

Òbviament G no és compacte perquè els paràmetres no es poden fitar.

Fixem-nos que el grup de *Lorentz* tampoc no és compacte, perquè el conjunt de valors possibles de la velocitat, malgrat que està fitat, no és tancat, ja que per a $v=c$ l'element del grup no està definit, en anul·lar-se el denominador de les transformacions corresponents.

TRANSLACIONS TEMPORALS

Si realitzem una *translació temporal activa* τ, tindrem de manera anàloga $f'(t+\tau) = f(t)$ o bé $f'(t) = f(t-\tau)$.

Amb les definicions $E = i\hbar\partial/\partial t$, $\alpha = \tau/\hbar$ i $U_t(\alpha) = exp(i\alpha E)$ i a partir d'un desenvolupament de *Taylor* arribem finalment a la relació

$$f'(t) = U_t(\alpha)f(t)$$

L'operador *translació* U_t és unitari degut que l'operador *energia E* és un operador hermític.

Els elements del grup depenen d'un paràmetre de forma contínua i es verifica que $U_t(\alpha).U_t(\beta) = U_t(\alpha + \beta)$.

Els U_t defineixen un grup de *Lie* de *dimensió 1* on l'operador energia n'és el *generador*. El paràmetre α pot variar al llarg de *R* (el seu "*group manifold*"). El seu rang és *1* i, com en les translacions espacials, no és compacte, simple o semisimple.

Si l'operador hamiltonià *no depèn explícitament del temps,* podem substituir *E* per *H* per trobar $U_t(\alpha) = exp(i\alpha H)$, ja que, en general, $E^n = H^n$. Així, per exemple, obtenim per a $n=2$ $E^2=H^2$:

$$E^2\psi = (i\hbar)^2\partial^2\psi / \partial t^2 = i\hbar\partial(H\psi) / \partial t = Hi\hbar\partial\psi / \partial t = H^2\psi$$

ROTACIONS ESPACIALS

Si realitzem una *rotació infinitesimal activa* amb *vector de rotació* $\delta\vec{\Phi}$, el canvi de coordenades ens vindrà determinat per $\vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{\Phi}x\vec{r}$ i obtindrem que $f'(\vec{r} + \delta\vec{\Phi}x\vec{r}) = f(\vec{r})$ o bé, alternativament, $f'(\vec{r}) = f(\vec{r} - \delta\vec{\Phi}x\vec{r}) = f(\vec{r}) - \delta\vec{\Phi}x\vec{r}.\nabla f(\vec{r}) = (1 - \vec{r}x\nabla.\delta\vec{\Phi})f(\vec{r})$.

A partir de la definició de $\vec{L} = -i\hbar.\vec{r}x\nabla$ obtenim finalment que $f'(\vec{r}) = (1 - (i / \hbar)\vec{L}.\delta\vec{\Phi})f(\vec{r})$. Escrivint $\delta\vec{\Phi} = \vec{\Phi} / N$ i aplicant la rotació *N* vegades amb $N \to \infty$, arribem a trobar l'expressió final corresponent a *una rotació activa* $\vec{\Phi}$ *finita*

$$f'(\vec{r}) = exp(-\frac{i\vec{\Phi}}{\hbar}.\vec{L})f(\vec{r})$$

Definim $\vec{\alpha} = -\vec{\Phi} / \hbar$ i $U_R(\vec{\alpha}) = exp(i\vec{\alpha}.L)$, amb la qual cosa obtenim

$$f'(\vec{r}) = U_R(\vec{\alpha})f(\vec{r}) = exp(i\vec{\alpha}.\vec{L})f(\vec{r})$$

L'operador *rotació* U_R és unitari, perquè *l'operador moment cinètic* $\vec{L}$ és hermític. El conjunt d'operadors U_R està parametritzat de forma *contínua* per tres paràmetres.

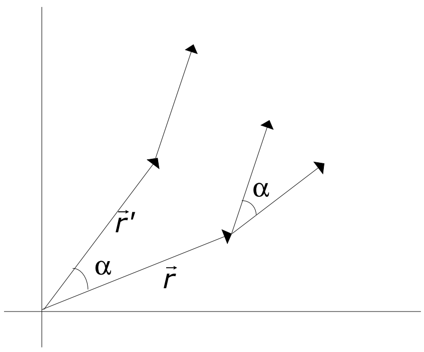
El grup G de rotacions U_R és un grup de *Lie* de *dimensió 3*. Els L_i en són els *generadors*. G està en *bijecció* amb un subconjunt de R^3 diferent d'ell ja que les rotacions corresponents a angles que difereixen en $z.2\pi | z \in Z$ són equivalents (el seu "*group manifold*" no coincideix amb R^3). La variació dels α_i entre fites concretes fa que G sigui compacte. Es tracta d'un grup simple i semisimple.

L'*àlgebra de Lie* ve donada per

$$[L_1, L_2] = i\hbar L_3 \quad [L_2, L_3] = i\hbar L_1 \quad [L_3, L_1] = i\hbar L_2$$

El nombre màxim de generadors que commutin entre ells és *1* i el *rang* del grup és també *1*. Podem trobar *un* operador L^2 a partir dels tres generadors ($L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$) que commuti amb tots ells (*operador de Casimir*).

Si tenim ara un vector de tres components que siguin funcions i fem una rotació activa obtindrem els dos canvis que es mostren a la figura següent:



a) Els components variaran per la pròpia rotació sense variar el punt a què corresponen.

b) Les funcions que expressen cada component canviaran també en transformar el punt d'aplicació del vector.

Finalment resulta que

$$\vec{\Psi}'(\vec{r}) = U_R(\vec{\alpha})\vec{\Psi}(\vec{r}) = exp(i\vec{\alpha}.(\vec{L} + \vec{S}))\vec{\Psi}(\vec{r})$$

, on $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$:

$$S_1 = i\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = i\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_3 = i\hbar\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{L}$ és l'operador *moment orbital* que actua sobre les coordenades, però no sobre els components.

$\vec{S}$ és l'operador *espín* que actua matricialment sobre els components, però no sobre les coordenades.

El grup *G* d'operadors U_R és un grup de *Lie* de 3 *dimensions* amb els J_i com a *generadors* on $J = L + S = (J_1, J_2, J_3)$ és el *moment angular total*. El seu "*group manifold*" no coincideix amb R^3 i les propietats de l'àlgebra són les d'abans.

És fàcil veure que els valors propis de S_i són $(-1,0,+1).\hbar$ i el de S^2 és $2\hbar^2 = s.(s+1)\hbar^2$, on $s=1$, la qual cosa justifica la denominació d'*espín.*

GRUPS DE LIE

A partir de tots els exemples anteriors podem entendre millor les propietats d'un grup de *Lie*, que resumim a continuació:

1-Un *grup de Lie* és un grup *G* amb el qual establim una bijecció amb *una varietat de* R^n *de n dimensions* (*varietat del grup o "group manifold"*). Aquesta bijecció, $x \in R^n \to g(x) \in G$, verifica que $g(a).g(b)=g(c)$, amb $c = \Phi(a,b)$ *infinitament derivable.*

Això implica que el grup sigui continu i diem que el conjunt *G* és un grup de *Lie amb n paràmetres o de n dimensions.*

Mitjançant un canvi de parametrització podem obtenir que, si $e \in G$ n'és l'element neutre, $e=g(0,0,...,0)$.

La topologia del "group manifold" es trasllada a *G.*

En el *veïnatge* de l'element neutre tenim

$$g(a_1, a_2, \dots) = g(0,0,\dots) + i\sum_k a_k X_k\,,\; X_k = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial g}{\partial a_k}\right)_{a_k=0}$$

Els X_k s'anomenen *generadors de G.* En les aplicacions físiques els generadors seran operadors hermítics, amb la qual cosa els elements de *G* esdevindran operadors unitaris.

Degut que tots els paràmetres són essencials, tenim que

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots = e \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = 0$$

, amb la qual cosa els generadors són *linealment independents*.

Si els a_k no són infinitesimals, sinó finits, es verifica finalment que

$$g(a_1, a_2, \ldots) = exp(i(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots))$$

2-Els generadors de *G* verifiquen les relacions

$$\rightarrow \left[X_l, X_j\right] = i\sum_k C_{lj}^k X_k$$

$$\rightarrow \left[X_l, \left[X_j, X_k\right]\right] + \left[X_j, \left[X_k, X_l\right]\right] + \left[X_k, \left[X_l, X_j\right]\right] = 0$$

La darrera expressió és la *identitat de Jacobi.*

Les C_{lj}^k s'anomenen *constants d'estructura* del grup de *Lie*. Els generadors depenen del tipus de parametrització, però no pas les constants d'estructura, que defineixen el grup.

Si definim l'operació interna $X_k.X_j=[X_k,X_j]$, l'espai vectorial generat per la base vectorial dels X_k té una estructura addicional anomenada *àlgebra de Lie.*

Les constants d'estructura verifiquen

$$\rightarrow C_{lj}^k = -C_{jl}^k$$

$$\rightarrow \sum_l (C_{ik}^l C_{lj}^m + C_{ji}^l C_{lk}^m + C_{kj}^l C_{li}^m) = 0$$

Si el grup és abelià, les constants d'estructura són nul·les.

Es demostra que un conjunt de constants d'estructura que verifiquin les dues propietats anteriors determinen completament l'àlgebra de *Lie* i *l'estructura local* del grup de *Lie* entorn del seu element neutre *e*. Dos grups amb la mateixa àlgebra són isomorfs localment, però més enllà de l'entorn ans esmentat no es pot realitzar la identificació. Salvant les diferències, això és semblant a l'equivalència local de dues funcions entorn de *x=a* quan coincideixen els valors de les imatges i d'algunes derivades en el punt; més enllà de l'entorn, però, l'equivalència desapareix.

3-El nombre màxim de generadors que commutin entre ells s'anomena *rang* del grup. Com sabem, *SO(3)* és de rang *1* i el grup de translacions té rang *3. SU(3)* té rang 2, com veurem més endavant, etc.

Un grup de *Lie semisimple* de rang *r* posseeix exactament *r* operadors linealment independents que commuten amb tots els generadors i, per tant, amb tots els operadors del grup i que es poden obtenir a partir dels generadors de l'àlgebra (*teorema de Racah).* Aquests operadors s''anomenen operadors de *Casimir.* Així, L^2 és l'operador de *Casimir* de *SO(3).* Qualsevol altre operador que verifiqui la propietat de commutació dels operadors de *Casimir* té una relació funcional amb aquests.

Una subàlgebra *A* de *G* serà un *ideal* de l'àlgebra *G,* si verifica que $\forall x \in G \ \forall y \in A \Rightarrow x.y \in A$.

Definim una àlgebra *G* com a *simple*, si no admet cap ideal (excepte els trivials *G* i $\{e\}$) i com a *semisimple,* si no té cap ideal abelià no trivial.

L'estudi dels grups de *Lie* possibles se simplifica extraordinàriament a partir del coneixement de les àlgebres de *Lie*. Aquesta és la tasca extraordinària que realitzà *Cartan.* En particular, desenvolupà la recerca matemàtica en aquests camps:

->Classificació de les àlgebres de *Lie*.

->Propietats locals dels grups de *Lie* i la seva classificació.

D'aquí hom troba:

->Les sèries *SO(n)* i *SU(n).*

->Els grups aïllats o excepcionals E_6, E_8, etc.

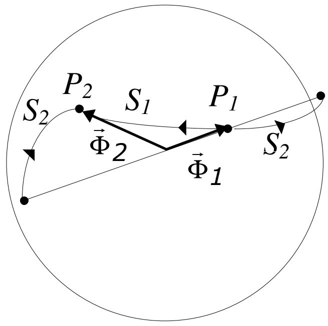
4-A partir d'un grup de *Lie* arc-connex podem establir múltiples corbes que connectin dos punts de la varietat corresponents a dos elements qualssevol del grup.

Totes les corbes que connecten dos punts de la varietat poden classificar-se en *m* famílies. En una família cada corba pot transformar-se de forma *contínua* en totes les altres corbes de la família. Diem aleshores que el grup és *connex m vegades* i que el grup és *simplement connex*, si *m=1.*

Si tenim un grup múltiplement connex *G,* existeix un grup $\tilde{G}$ simplement connex (el *recobriment universal* de *G* o "*covering group*") tal que *G* és isomorf amb $\tilde{G}/H$, on *H* és un subgrup invariant de $\tilde{G}$.

SU(2) i *SO(3)* tenen la mateixa àlgebra de *Lie* i són localment isomorfs, però no pas globalment isomorfs: *SU(2)* és simplement connex i *SO(3)* doblement connex.

Podem veure fàcilment que *SO(3)* és doblement connex.



A la figura superior observem que la *varietat* de *SO(3)* està formada pels punts del volum esfèric de radi π. Els punts dels extrems d'un diàmetre de la superfície esfèrica representen la mateixa rotació. Per connectar dos punts P_1 i P_2 podem seguir trajectòries, com S_1 i S_2, corresponents a dues famílies de corbes que no poden transformar-se entre elles de forma contínua.

SU(2) conté el subgrup invariant finit $Z2=\{I,-I\}$ i és el recobriment universal de *SO(3)* que verifica $SO(3) \approx SU(2)\,/\,Z2$.

SO(3) i *SU(2)* són grups *de Lie* semisimples. *SU(2),* per exemple, no és un grup semisimple (*Z2* n'és un subgrup abelià), però és un grup *de Lie* semisimple, perquè *Z2* no és un grup de *Lie*, en ser finit.

De manera anàloga es verifica que $L_+^\uparrow \approx SL(2,C)\,/\,Z2$, on $L_+^\uparrow$ és el grup propi i ortocron de *Lorentz* (vegeu el capítol 2).

L'estudi de les representacions, que veurem a continuació, es facilita extraordinàriament a partir de les propietats del recobriment universal d'un grup de *Lie* múltiplement connex.

Per acabar, observem que *SO(3)* és connex, però no ho és el grup *O(3),* perquè les transformacions per inversió espacial el fan inconnex. De la mateixa manera, $L_+^\uparrow$ és connex, però no ho és el grup de *Lorentz* complet que inclou les transformacions per inversió espacial i temporal.

REPRESENTACIONS DE GRUPS

Una *representació* d'un grup *G*, finit o no, ve donada per un morfisme entre *G* i un grup d'operadors lineals que actuen sobre un espai de *Hilbert*. Les estructures i propietats de *G* es traslladen al grup dels operadors de la representació. Aquesta podrà esdevenir unitària per als grups finits i per als grups compactes.

Si l'espai de *Hilbert* és de dimensió *n,* direm que la representació és de *dimensió n.* Cada operador de la nostra representació vindrà definit per una matriu *nxn* on cada columna ens donarà els components de la imatge del vector corresponent de la base vectorial*. Un grup G pot tenir representacions de diferents dimensions.* Per a cada representació podem realitzar un canvi de base vectorial i aleshores les matrius canviaran, com ja sabem, segons la relació $T'=A^{-1}.T.A$, on *A* és la matriu de canvi de base vectorial. D'acord amb l'anterior, les matrius lligades per l'esmentada relació s'anomenen *equivalents* i tenen els mateixos determinants, traces i valors propis.

La importància del concepte de representació està en el que diem a continuació:

1-Suposem l'existència d'un grup *G, rector* d'una simetria física essencial.

2-Com actua aquest grup sobre els estats? Si $g \in G$, tindrem l'operador O_g de la representació que actuarà sobre els estats. Nosaltres imposem la condició "natural"

$$O_{g_1.g_2} = O_{g_1}.O_{g_2}$$

Per tant, el conjunt d'operadors demanat constitueix una representació de *G.*

3-Si dins de l'espai de *Hilbert* no trobem subespais no trivials que siguin invariants davant de les transformacions que fan els operadors, direm que la representació és *irreductible.* Si la representació és *reductible,* podrem (mitjançant un canvi de base, si cal) transformar la representació en suma directa de representacions irreductibles i l'espai vectorial en suma directa de subespais invariants. Aleshores, totes les matrius de la representació tindran la forma

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \begin{pmatrix} \end{pmatrix} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \begin{pmatrix} \end{pmatrix} & \cdots \\ \cdots & 0 & \cdots & \ddots \end{pmatrix}$$

, amb tots els elements que no pertanyen a les matrius situades a la diagonal principal iguals a zero.

La representació *reductible* Γ l'escriurem com a *suma directa* $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \ldots$ de les representacions *irreductibles* Γ_i. Cada subespai invariant s'anomena *multiplet* del grup. *Tot el multiplet pot generar-se per l'acció dels diferents operadors sobre un vector concret del multiplet.*

Considerem ara un operador *C* de *Casimir, que commuta amb tots els operadors del grup*, (en realitat estem parlant de les imatges corresponents de la representació i farem normalment aquest abús de llenguatge *confonent* el grup original *G* i el grup d'operadors de la representació *gràcies* al morfisme). Dins d'un multiplet tots els vectors es podran generar a partir d'un únic vector $|\Psi\rangle$. Suposant que aquest estat sigui vector propi amb valor propi *k* de l'operador de *Casimir C*, podrem fer aquest raonament, si $|\varphi\rangle$ és un altre vector del multiplet:

$C|\varphi\rangle = CO_g|\Psi\rangle = O_gC|\Psi\rangle = O_gk|\Psi\rangle = kO_g|\Psi\rangle = k|\varphi\rangle$ i, per tant, tots els vectors del multiplet són vectors propis de *C* amb el mateix valor propi *k*. *En conseqüència, cada multiplet ve caracteritzat pels valors propis concrets dels operadors de Casimir.*

Si $|\Psi\rangle$ és un estat vàlid, també ho serà $O_g|\Psi\rangle$ i podrem escriure les implicacions següents, si els O_g no depenen explícitament del temps:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}O_g|\Psi\rangle = HO_g|\Psi\rangle \Rightarrow O_g i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = HO_g|\Psi\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O_g^{-1}O_g i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = O_g^{-1}HO_g|\Psi\rangle \Rightarrow O_g^{-1}HO_g = H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [O_g, H] = 0$$

Per tant, repetint el raonament fet abans amb els operadors de *Casimir*, *en cada multiplet l'energia estarà degenerada*.

Anem a aplicar tot l'anterior a l'estudi no relativista de l'àtom d'hidrogen amb simetria esfèrica (vegeu el capítol 7). El grup

SO(3) té rang *1* i l'operador de *Casimir* és $L^{2.}$ Cada multiplet correspondrà a estats propis de L^2 i de l'energia. Així tindrem multiplets corresponents als nombres quàntics (*n,l*) següents: *(1,0) (2,0) (2,1) (3,0) (3,1) (3,2)...* Aquí veiem que la degeneració de l'energia (que depèn només de *n*) hi és dins d'un multiplet i *entre diferents multiplets.* La degeneració energètica entre diferents multiplets és una degeneració *accidental* deguda a la forma del potencial de *Coulomb* . *En general, però, la degeneració energètica només ocorre dins d'un multiplet o espai invariant d'una representació irreductible.* Això ens indica la gran importància de l'estudi de les representacions irreductibles d'un grup de simetria.

4-Com pot quedar trencada la degeneració energètica per la presència d'una pertorbació introduïda al hamiltonià? Suposem que el hamitonià original tingui la simetria del grup *G.* Les representacions irreductibles de *G* ens donaran la degeneració corresponent a cada nivell energètic. Si ara introduïm una pertorbació, el nou grup de simetria *G'* pot ser un subgrup de *G* diferent d'ell. Els espais invariants sota *G* ho seran també sota *G',* però una representació irreductible de *G* pot ser reductible amb *G'.* Si transformem la representació reductible anterior en suma directa de representacions irreductibles, desapareixerà part de la degeneració inicial i alguns nivells degenerats se subdividiran i apareixeran nous nivells.

5-Suposem ara dos estats, $|\Psi\rangle$ $|\varphi\rangle$, i que el hamiltonià fixi l'evolució de $|\varphi\rangle$. Podrà haver-hi una transició d'aquest cap a l'estat $|\Psi\rangle$? A partir de l'equació evolutiva $i\hbar\partial|\varphi\rangle\,/\,\partial t = H|\varphi\rangle$ es demostra que la probabilitat de la transició és proporcional a $\langle\Psi|H|\varphi\rangle^2$ i l'anterior només serà possible si $\langle\Psi|H|\varphi\rangle \neq 0$.

Si *H* té la simetria de *G,* ell commutarà amb tots els operadors de *Casimir* del grup. Cada multiplet vindrà determinat per valors propis *específics* dels operadors de *Casimir*, de tal manera que, si tenim dos multiplets diferents, aquests diferiran, al menys, en un valor propi d'un operador de *Casimir C.* Si $|\varphi\rangle \to |\Psi\rangle$ estan en dos multiplets amb valors propis *distints*, C_φ i C_Ψ tindrem que

$$\langle\Psi|CH - HC|\varphi\rangle = 0 \Rightarrow (C_\Psi - C_\varphi)\langle\Psi|H|\varphi\rangle = 0 \Rightarrow \langle\Psi|H|\varphi\rangle = 0$$

Això ens indica que únicament podrem obtenir transicions entre estats que pertanyin al mateix multiplet. En el cas que els estats tinguin components en diferents multiplets, només es tindran en compte transicions entre vectors de la base vectorial que pertanyin a un mateix multiplet (quan estudiem el grup *SU(2)* al capítol 9 veurem amb més profunditat l'anterior).

L'ESTUDI DE LES REPRESENTACIONS

Aquest és un aspecte teòric sense gaire interès conceptual per als nostres objectius i en gran part ha estat desenvolupat per *Young, Frobenius* i *Schur.* Esmentem a continuació *només de passada* els punts següents sense, però, aprofundir-los.

Amb la relació d'equivalència de $G, aRb \Leftrightarrow \exists u | uau^{-1} = b$, G queda partit en classes d'equivalència anomenades *classes de conjugació.* En la representació les matrius representatives dels elements d'una classe conjugada tenen la mateixa traça.

El conjunt de traces d'una representació s'anomena conjunt de *caràcters,* no varia entre representacions equivalents i defineix en part la representació.

L'estudi de les representacions d'un grup es facilita, si suposem que les matrius són unitàries (*representació unitària)*. En els grups finits i en els de *Lie* compactes sempre és possible trobar una representació unitària equivalent a una de donada.

Estan totalment resolts teòricament aquests aspectes:

a) Criteris per conèixer si una representació és reductible.
b) Nombre de representacions irreductibles no equivalents.
c) Relació entre les matrius de representacions irreductibles no equivalents.
d) Reducció d'una representació.

CREACIÓ DE NOVES REPRESENTACIONS: COEFICIENTS DE CLEBSCH-GORDAN

Quan fem la descomposició d'una representació reductible en la seva suma directa de representacions irreductibles hem obtingut noves representacions. Podem afirmar el mateix quan obtenim una representació com a suma directa d'altres conegudes.

Vegem ara, *conceptualment només,* com obtenir noves representacions mitjançant el producte tensorial d'espais vectorials.

El producte tensorial de dos espais vectorials E_n i V_m de dimensions *n* i *m,* respectivament, és un espai vectorial que té per dimensió *nxm* i on els seus vectors s'obtenen així:

$$\vec{x}=x^i\vec{e}_i \in E_n,\ \vec{y}=y^j\vec{v}_j \in V_m \to \vec{x}\otimes\vec{y}=x^i y^j \vec{e}_i \otimes \vec{v}_j \in E_n \otimes V_m$$

Els *nxm* vectors $\vec{e}_i \otimes \vec{v}_j$ són una base vectorial de $E_n \otimes V_m$.

a) Partim de dues representacions irreductibles de dos grups *distints*, G_1 i G_2. Els operadors d'ambdues representacions actuaran sobre els espais de *Hilbert* E_1 i E_2, respectivament.

->Ordenem els $\vec{e}_i \otimes \vec{v}_j$, segons l'ordre de *diccionari* dels seus índexs: *11, 12,..., 1m, 21, 22,..., 2m,..., n1, n2,..., nm.* Així definirem la nova base vectorial $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_{n.m}$ de $E_1 \otimes E_2$.

->Multipliquem cadascun dels elements de les matrius representatives de G_1 per cadascun dels elements de les matrius representatives de G_2. Els $(n.m)^2$ nombres obtinguts els ordenem, segons la seqüència que veurem a continuació, i obtenim un conjunt de matrius d'ordre *nxm*. Si *n=2* i *m=3,* per exemple, tindríem les matrius *2x3* amb els seus elements definits per aquestes seqüències dels dos índexs dels dos elements de les matrius que hem multiplicat:

1111, 1112, 1113, 1211, 1212, 1213
1121, 1122, 1123, 1221, 1222, 1223
1131, 1132, 1133, 1231, 1232, 1233

... tres files anàlogues més començant per 21, 21, 21, 22, 22, 22.

->Aquestes matrius defineixen una representació *irreductible* d'ordre *nxm* del grup $G_1 x G_2 = \{g = g_1 . g_2,\ \forall g_1 \in G_1,\ \forall g_2 \in G_2\}$, amb $G_1 \cap G_2 = \{e\}$ i en la nova representació els operadors actuaran sobre el *producte tensorial* $E_1 \otimes E_2$.

b) Tenim ara dues representacions irreductibles d'un *mateix* grup *G* que actuen sobre els espais E_1 i E_2. Una variant del procediment anterior, on les matrius multiplicades seran representatives del mateix element del grup *G,* ens donarà una representació de *G, en general reductible,* que actuarà sobre l'espai $E_1 \otimes E_2$.

Aquesta nova representació del grup *G* podrà reduir-se amb un canvi de base vectorial a $E_1 \otimes E_2$. Els coeficients de *Clebsch-Gordan,* o els seus equivalents, ens donen l'esmentat canvi per transformar la representació reductible com a suma directa de representacions irreductibles.

Si $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle$ són vectors de valors propis k_1, k_2 amb l'operador T corresponent a $t \in G$ en la representació original, es demostra que $|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle$ té valor propi $k_1.k_2$ amb l'operador $T_\otimes$ corresponent al *mateix* $t \in G$ en la nova representació.

Si treballem amb operadors unitaris U, tindrem que $U.U^+=I$. Si l'operador U verifica $U^2=I$, aleshores $U=U^+$ i l'operador serà un operador hermític, que representarà un observable en què el valor propi d'un producte tensorial de vectors s'obtindrà multiplicant els valors propis dels seus components, com a la paritat.

Si no es compleix $U^2=I$, U no serà hermític i no podrà correspondre a un observable. Tanmateix, en aquest cas podem obtenir un operador V hermític que verifiqui $U = exp(i\alpha V)$ i que representarà un observable òbviament *additiu.* Així, si $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle$ tenen valors propis k_1 i k_2 amb l'operador T, $|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle$ tindrà valor propi k_1+k_2 amb $T_\otimes$. Això és el que ocorre amb els generadors, com l'isoespín i la hipercàrrega de *SU(3).*

REPRESENTACIONS DE GRUPS DE LIE

Quant a les representacions dels grups de *Lie*, podem assenyalar essencialment el que especifiquem a continuació:

1-En grups de *Lie* com *SU(n),* per exemple, en què els elements són matrius, els propis elements del grup formen una representació *isomorfa* irreductible anomenada *fonamental.*

2-De la representació fonamental es poden deduir les altres representacions irreductibles que actuaran sobre el producte tensorial entre els espais de *Hilbert*. Aquestes representacions irreductibles es trobaran a partir de la representació reductible coneguda (obtinguda pel procediment que abans hem esmentat) mitjançant els coeficients de *Clebsch-Gordan*.

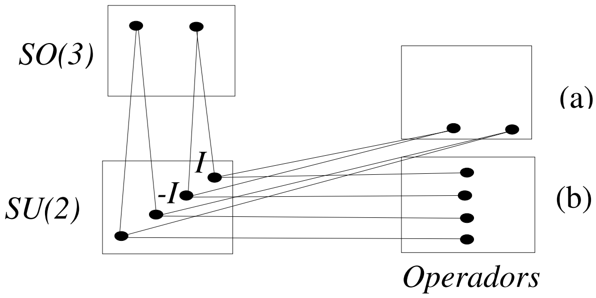
3-A partir de les constants d'estructura d'un grup de *Lie* de dimensió n es pot definir la representació *adjunta* de matrius nxn generades amb els elements

$$(X_k^{adj})_m^l = iC_{mk}^l$$

4-En el que segueix raonarem amb *SO(3)* i el seu recobriment universal *SU(2).*

Entre *SU(2)* i *SO(3)* podem establir un morfisme en el qual cada element de *SO(3)* tingui dues antiimatges a *SU(2).* En particular, I i $-I$ són les antiimatges de l'element neutre de *SO(3).* El conjunt $\{I,-I\}$ és un subgrup abelià de *SU(2)* que permet fer l'isomorfisme $SU(2)\ /\ Z2 \approx SO(3),\ Z2 = \{I,-I\}$.

Si en una representació de *SU(2)* a I i $-I$ els correspon la mateixa imatge, haurem definit una representació de *SO(3),* segons que veiem a la part (a) de la figura següent.



Si en una representació de *SU(2),* però, I i $-I$ tenen diferents imatges, aleshores a *SO(3)* cada element tindrà dues imatges en la representació corresponent, segons mostra la part (b) de la figura. La representació de *SO(3)* serà *multiforme* i la podrem concretar a la branca corresponent a *I.* Veiem, doncs, que l'estudi de les representacions multiformes es facilita a partir de les representacions uniformes del seu recobriment universal.

De manera anàloga relacionaríem les representacions dels grups *SL(2,C)* i $L_+^{\uparrow}$ subgrup de L_+=*SO(3,1)* (aquesta nomenclatura està fonamentada en la mètrica). Les representacions de $L_+^{\uparrow}$ serien multiformes i les del seu recobriment *SL(2,C)* uniformes.

Vegem a continuació uns exemples de grups de *Lie* que són importants per a les aplicacions físiques:

a) U(1)

Es tracta del grup *abelià* de matrius unitàries *1x1* d'element $exp(i\alpha)$. És un grup compacte que no és ni simple ni semisimple.

La parametrització es pot fer a l'interval $[0,2\pi]$ amb els extrems equivalents. *U(1)* és un grup uniparamètric i els operadors d'una representació seran de la forma $exp(i\alpha Q)$ on l'operador *"càr-*

rega" Q tindrà un valor concret en cada multiplet. L'actuació del grup *U(1)* en un multiplet, a través de la seva representació, serà

$$|\Psi'\rangle = exp(i\alpha Q)|\Psi\rangle = exp(i\alpha q)|\Psi\rangle$$

, on *q* és la "càrrega" de $|\Psi\rangle$. Segons el tipus de transformació elegit, *Q* pot representar diferents magnituds: càrrega elèctrica, hipercàrrega, nombre bariònic, etc.

b) SU(2)

SU(2) és el grup de matrius unitàries *2x2* amb determinant igual a *1* i constitueix l'exemple més senzill de grup de *Lie no abelià.*

La seva àlgebra de *Lie* és la corresponent a la dels moments angulars. El seu rang és *1* i cada multiplet posseirà vectors de l'espai de *Hilbert* amb el mateix valor propi de l'operador de *Casimir* J^2: $j=0,1/2,1,3/2,...$ Els valors propis de J_3 estaran entre els $j, j-1,...,-j$. Per tant, tindrem representacions irreductibles de

->dimensió 1 amb $j=0,\ j_3=0,$

->dimensió 2 amb $j=1/2,\ j_3=-1/2,\ 1/2,$

->dimensió 3 amb $j=1,\ j_3=-1,\ 0,\ 1,$ etc.

SU(2) admet representacions de totes les dimensions i pot associar-se a qualsevol moment angular com l'espín, isoespín, etc. Normalment s'associa a l'isoespín.

SU(2) és simplement connex i recobriment universal del grup *SO(3).* Es tracta d'un grup compacte, simple i semisimple.

c) SO(3)

Aquest grup posseeix la mateixa àlgebra de *Lie* que *SU(2)* i, per tant, és localment isomorf a ell, però no ho és globalment.

SO(3) és doblement connex i el seu recobriment universal és *SU(2).* És un grup compacte, simple i semisimple.

A partir de les representacions del seu recobriment universal *SU(2)* comprovem que:

->*SO(3)* posseeix representacions uniformes corresponents a *j* enter.

->*SO(3)* posseeix representacions de multiplicitat 2, si *j* és semienter.

Degut a l'anterior s'acostuma a dir que *SO(3)* només admet representacions amb *j* enter. Això, però, pot salvar-se acceptant solament la branca corresponent a *I* per a *j* semienter. Amb aquest aclariment *SO(3)* pot associar-se a tots els moments angulars, com l'espín, moment angular orbital, etc. i admet representacions de qualsevol dimensió. En cada multiplet *j* és constant.

c) SU(3)

Donada la gran importància d'aquest grup compacte, simple i semisimple en la classificació de les partícules i en la cromodinàmica quàntica, deixem el seu estudi per al capítol 9, on podrem conèixer en profunditat l'estructura dels hadrons compostos per quarks i la presència de *SU(3)* en la interacció forta.

d) SL(2,C), $L_{+}^{\uparrow}$ i el grup de Lorentz-Poincaré

$L_{+}^{\uparrow}$ és el grup propi i ortocron de *Lorentz* i *SL(2,C)* el seu recobridor universal. Les representacions de $L_{+}^{\uparrow}$ són de multiplicitat 2 i es dedueixen de les representacions uniformes de *SL(2,C).* Amb el mateix aclariment que hem fet a *SO(3),* parlarem de les representacions del grup propi ortocron de *Lorentz* sense restriccions.

El grup de *Lorentz-Poincaré* té *10* generadors:

->Quatre, corresponents a l'energia-impuls p^{α}.

->Sis, corresponents al quadritensor moment cinètic $M^{\alpha\beta}$.

L'àlgebra del grup *L-P,* amb les relacions de commutació entre els deu generadors, és de rang *2* i els seus multiplets vindran definits pels nombres quàntics *fixos:*

->*La massa contínua m.*

->*El moment j (0, 1/2, 1, 3/2,...).*

EL GRUP SO(3)

Suposem que tenim dos sistemes quàntics amb simetria esfèrica i que cadascun d'ells per separat es troba en un estat estacionari que pertanyerà a un multiplet de *SO(3)* amb un moment angular precís.

Si els sistemes *no estan acoblats*, el conjunt tindrà la simetria corresponent a *SO(3)xSO(3)* i el producte tensorial dels dos espais permetrà definir una representació irreductible que ens donarà la degeneració d'energia a cada multiplet. En aquest cas tindrem *6* generadors $J_1, J_2, J_3, J'_1, J'_2, J'_3$ amb els J_i actuant sobre un sistema i els J'_i actuant sobre l'altre. Hi haurà dos operadors de

Casimir J^2 i J'^2 i cada multiplet contindrà estats propis d'ambdós operadors amb les degeneracions habituals degudes a J_3 i J'_3. A cada multiplet tindrem la base vectorial formada pels vectors del producte tensorial $|jm\rangle \otimes |j'm'\rangle$ amb nombres quàntics *j, m* i *j', m'* corresponents a J^2, J_3 i J'^2, J'_3, respectivament. Donat que a cada multiplet els nombres quàntics *j* i *j'* són constants s'acostuma a escriure $|jm\rangle \otimes |j'm'\rangle = |m\rangle \otimes |m'\rangle = |mm'\rangle$.

Suposem ara que introduïm *acoblament* entre aquells dos sistemes. Els dos sistemes quàntics hauran de fer la mateixa rotació. El nou grup de simetria no serà *SO(3)xSO(3),* sinó *SO(3).* La representació de *SO(3)* definida amb el producte tensorial dels espais vectorials ja no serà irreductible i en poder-se reduir es trencarà part de la degeneració energètica inicial. Ara tindrem únicament tres generadors corresponents a $J_T = J + J'$ amb un operador de *Casimir* J_T^2. A cada multiplet tindrem una base vectorial $|J_T m_T\rangle$, amb $m_T=J_T,...,-J_T$, que podrem expressar en funció de la $|jm\rangle \otimes |j'm'\rangle$ així:

$$|J_T m_T\rangle = \langle mm'|J_T m_T\rangle\, |jm\rangle \otimes |j'm'\rangle$$

Els $\langle mm'|J_T m_T\rangle$ són els coeficients de *Clebsch-Gordan* i els possibles valors de J_T estaran entre $j+j'$ i $|j-j'|$.

Sempre que ens trobem amb problemes d'addició de moments angulars podrem seguir les petjades anteriors:

Suposem, per exemple, que tenim dos sistemes amb moments angulars i components, segons *z,* corresponents als nombres quàntics *1/2* i (*-1/2,1/2*) i *1* i (*-1,0,1),* respectivament. La dimensió del producte tensorial serà 2x3=6. Els nous multiplets amb l'acoblament tindran $j_T=1/2$ amb projecció, segons *z,* corresponent a (*-1/2, 1/2*) i dimensió 2 i $j_T=3/2$ amb projecció, segons *z,* corresponent a (*-3/2, -1/2, 1/2, 3/2*) i dimensió *4*. La matriu 6x6 inicial en la base $|1/2\ m\rangle \otimes |1\ m'\rangle$ s'ha transformat en una altra matriu 6x6 amb les matrius de dimensions *2x2* i *4x4*, situades sobre la diagonal principal, que correspondran a les noves representacions irreductibles de dimensions *2* i *4* amb les seves bases $|1/2\ m_T\rangle$ i $|3/2\ m'_T\rangle$.