APÈNDIX 4: TEOREMES DE GÖDEL I COMPUTABILITAT

TEOREMES DE GÖDEL

Kurt Gödel va haver d'esperar vint anys fins que el 1951 se li atorgà el premi *Albert Einstein* en reconeixement dels seus treballs publicats el 1931, com a "*una de les contribucions científiques més grans dels darrers temps*".

Els seus teoremes es refereixen a l'aritmètica que inclou el sistema dels nombres naturals i s'arriba a ells a partir essencialment de les passes següents:

1-Es realitza la descripció d'un sistema formal, adaptació dels "Principia" de *B. Russell*, per a l'aritmètica dels nombres naturals.

2-A cada expressió E_i del sistema formal (elements, fórmules, successió finita de fórmules,...) se li assigna un únic *número de Gödel*, natural.

3-Cada proposició *metamatemàtica* sobre expressions E_i ve representada per una expressió entre els seus números de *Gödel*, de tal manera que, si l'expressió és vertadera, ho és la proposició metamatemàtica i recíprocament.

4-Es construeix una expressió aritmètica *G* que representa la proposició metamatemàtica "*G* no és demostrable".

5-Arribem a la conclusió que tant *G* com *no-G* no són formalment demostrables. Per tant, *G* és indecidible i la seva expressió representativa és vertadera.

6-D'aquí es pot enunciar *el primer teorema de Gödel*: Dins del sistema formal *consistent* de l'aritmètica dels nombres naturals hi ha expressions *indecidibles* i veritats formals que no poden demostrar-se formalment (*indecidibilitat i incompletesa*) . Per tant, *el sistema formal de l'aritmètica, si és consistent, no és complet.*

7-La proposició metamatemàtica "l'aritmètica és consistent" ve representada per l'expressió aritmètica *A*.

8-L'expressió $A \Rightarrow G$ és formalment demostrable i, si l'aritmètica és consistent, *A* no serà demostrable, ja que *G* seria, en conseqüència, demostrable i l'aritmètica ja no seria consistent.

9-*El segon teorema de Gödel* té aleshores l'expressió següent: *Si l'aritmètica és consistent, la seva consistència no pot ésser demostrada mitjançant un raonament metamatemàtic a través d'una representació dins del formulisme de l'aritmètica*. Això ve a dir que la prova de la seva consistència està fora d'ella mateixa en un sistema més ampli. Apareix, tanmateix, el problema de la possible consistència del nou sistema.

Annex: El teorema de Tarski. *Tarski* demostrà que la noció de veritat en una teoria aritmètica *T* no és pot definir en *T. Tarski* va concloure que no podem trobar una fórmula *VERITAT(x)* tal que $VERITAT(a^*)$, on a^* és el número de *Gödel* corresponent a una fórmula *a,* representi l'afirmació "*a* és veritat en *T*" (*teorema de Tarski*).

COMPUTABILITAT

Els treballs d'*Alan Turing*, amb la introducció de les màquines que porten el seu nom, permeteren el desenvolupament de la *teoria de la computabilitat*. Una *màquina de Turing* és un sistema abstracte que permet, *en principi,* a partir d'una entrada obtenir una sortida, un cop que la màquina s'hagi aturat (STOP). El conjunt possible de màquines de *Turing* és numerable. La màquina T_n actuant sobre una entrada *a* produirà una sortida *b* després de l'STOP i escriurem $T_n(a)=b$.

Existeix la *màquina universal de Turing* $U=T_u$ que permet la simulació de qualsevol màquina de *Turing*: *U* a partir de les entrades *n* i *a* produirà la sortida *b* que la màquina T_n obtindria a partir de *a* i escriurem $U(n,a)=T_n(a)$ [29]. Parlant en termes més col·loquials, una màquina de *Turing* representaria el software i una màquina universal un ordinador. En aquest sentit, *Turing* s'avançà a *von Neumann,* creador de l'arquitectura dels computadors programables moderns, en la diferenciació entre hardware i software.

La *tesi de Turing* afirma la identitat entre les funcions computables a partir d'una màquina de *Turing* (funcions *CT*) i les computables mitjançant un algorisme (funcions *CA*). Per altra banda es demostra que tota funció *CT* és recursiva (funció *R*) i recíprocament. Això ens ve a confirmar la identitat entre les classes de funcions *CA* i *R*, d'acord amb la *tesi de Church.* La noció intuïtiva d'*algorisme* com a un conjunt de procediments per computar i trobar respostes a qualsevol pregunta entre les d'una classe determinada es concreta, a partir de les tesis equivalents de *Turing-Church*, a través de la seva realització mitjançant una màquina de *Turing* (*computabilitat*). La tesi de *Turing-Church*, en definitiva, permet la identificació de conceptes com computabilitat, algorisme i recursivitat amb allò que pot desenvolupar una màquina de *Turing*.

Amb la noció anterior de computabilitat ens podem preguntar sobre què coses són computables. Per exemple: els nombres reals π i $\sqrt{2}$ són computables, però la immensa majoria de nombres irracionals no ho són, perquè ells formen un conjunt no numerable i el conjunt de les màquines de *Turing* és només numerable. La computabilitat ve relacionada amb el problema de la parada d'una màquina de *Turing* (STOP), sense la qual no podem tenir una resposta. Com podem saber si una màquina de *Turing* enfrontada a un determinat problema s'aturarà o no?

En el problema 10 de *David Hilbert* plantejat l'any 1900 es demanava l'estudi sobre la possibilitat o no de resoldre qüestions matemàtiques d'una *classe general* ben definida. No es tractava de resoldre un problema concret, sinó una *classe molt àmplia* de problemes, com la resolució d'equacions diofàntiques polinòmiques *arbitràries*. La solució al problema de *Hilbert*, amb la noció de computabilitat a partir de l'STOP d'una màquina de *Turing*, consisteix a afirmar que no hi ha aquest procediment *general*. *Gödel* demostrà que hi ha afirmacions indecidibles de les quals no podem assegurar ni la veritat ni la falsedat. *Turing* va anar molt més enllà demostrant que no hi ha un procediment *general* per identificar-les. En aquest sentit, el resultat de *Gödel* és més filosòfic i el de *Turing* més matemàtic.

Tot l'anterior té una relació amb la teoria de la informació (vegeu l'apèndix 6). En efecte: només es poden demostrar formalment aquelles fórmules amb un contingut informatiu que no superi el que posseeix el conjunt d'axiomes del formulisme.

La complexitat algorísmica d'una seqüència aleatòria ve donada per la longitud del programa més petit que la genera i no és, en general, computable, com ha demostrat *Chaitin.* Aquest resultat complementa els obtinguts per *Gödel* i *Turing* amb anterioritat. Segons això, una teoria final de la física serà sempre provisional davant del desconeixement de la possible existència d'una altra de més senzilla.

Turing estava convençut que la intel·ligència humana funcionava algorísmicament: si un interrogador feia una sèrie de preguntes a un home i a un ordinador i per les respostes impersonals d'ambdós no podia distingir qui les havia fetes, arribaria a la conclusió que no hi havia diferència entre ambdós (*test de Turing*). *La intel·ligència artificial* (*IA*) que ha superat el test de *Turing* seria en tot igual a la ment humana amb els seus sentiments i emocions (*IA forta*). El problema de la *IA* forta és molt debatut, amb partidaris i contraris*. Von Neumann*, un dels capdavanters en la recerca informàtica, n'és un detractor. *Minsky*, un dels pioners en la investigació de la *IA*, posa en dubte el programa original de la *IA*, tot afirmant que és més fàcil d'emular la intel·ligència superior que el que fa un nen. És molt possible, també, que la intel·ligència humana superior que *Llull* desitjava en *El llibre de les bèsties* sigui més fàcil d'emular que la dels animals que *Turmeda* defensava en la seva rèplica de *La disputa de l'ase*!

La *cibernètica* (*Wiener*) i la *teoria de les xarxes neuronals cibernètiques*, que reben el seu nom de les xarxes neuronals cerebrals, la teoria de la *informació* (*Shannon*) i *la lògica difusa de Zadeh* estan a la base de les recerques sobre *IA*. En qualsevol cas, sembla que la consciència escapa a qualsevol reduccionisme.

La conclusió de *Gödel-Turing* que afirma la impossibilitat d'elaborar un sistema que sigui alhora consistent i complet dóna lloc a un problema filosòfic important: no podria ser que, en part, es pogués superar aquella incompatibilitat gràcies a l'existència d'elements no computables en el nostre pensament i en la nostra consciència? *Penrose* ho creu així, tot afirmant que la ment humana no funciona algorísmicament i que conté quelcom que va més enllà de la computabilitat[35].

Per acabar, convé distingir entre computabilitat i determinisme. L'evolució d'un sistema pot ser determinista i, malgrat això, no ser computable: és el que passa amb l'aplicació de les equacions de *Maxwell* en alguns sistemes amb unes condicions de contorn *molt especials,* on l'evolució determinista no pot ser computada.