Título: Algoritmo Unificador de Cuadrados Mágicos de la Forma N = 4n y N = 4n + 2
Autor: Luis R. Morera González

0. Resumen

En este artículo se muestra otro algoritmo para hallar la solución de un cuadrado mágico de orden par "múltiplo de cuatro" (N = **4n**) utilizando el algoritmo de los cuadrados mágicos de orden N = 4n + 2.

Podemos llegar una nueva solución de los cuadrados mágicos de orden $N = 4 \times n,\ n \geq 2$ si utilizamos el algoritmo de la **TABLA 2** "cuadrados de orden N = 4n + 2" definiendo el número de vueltas como V(n)=2n-3. Además tenemos que intercambiar una serie de celdas del cuadrado mágico obtenido.

Ejemplo 1: Cuadrado mágico de orden N= $4 \times 2 = 8$, n = 2. Para resolver este cuadrado mágico usaremos el algoritmo de la **TABLA 2.** En este cuadrado mágico el número mágico esta dado por $M(N) = \dfrac{8^3 + 8}{2} = 260$ y el número de vueltas es V(2)=2x2-3=1 .

(PASO 1)

Comenzaremos escribiendo el número 1 en el extremo superior izquierdo (**S-I**) y desplazándonos de izquierda a derecha (**I-D**) y contando los números 1, 2, 3, …, 64, llenaremos las celdas correspondientes a las diagonales principales (**DP),** dejando las otras celdas vacías**.**

1>inicio							8
>	10					15	
>		19			22		
>			28	29			
>			36	37			
>		43			46		
>	50					55	
57>							64

(PASO 2) El Número de Vueltas esta dado por $V(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$ e indica que tendremos que zigzaguear una vez "hacer el **PASO 2.1**". Para llenar la diagonal interior 1 y la diagonal exterior 1 respectivamente.

(PASO 2.1)

Ahora nos situaremos en el extremo inferior derecho (**I-D**) y desplazándonos en zig-zag (**Z-Z**) contaremos los números 1, 2, 3, …, 64 y llenaremos la diagonal interior 1 (**Di 1**) y la diagonal exterior 1 (**De 1**).

1>	58					63	8
	10	54			51	15	<
>		19	44	45	22		
40			28	29			<33
25>			36	37			32
		43	21	20	46		<
>	50	11			14	55	
57	7					2	<64inicio

(FINAL 1)

Ahora nos situaremos en el extremo inferior derecho (**I-D**) y desplazándonos de derecha a izquierda (**D-I)** contaremos los números 1, 2, 3, …, 64 y llenaremos los números pares que faltan (**F**).

1	58	62		60		63	<8
56	10	54		52	51	15	<
48		19	44	45	22	42	<
40		38	28	29		34	<33
25		30	36	37		26	<32
24		43	21	20	46	18	<
16	50	11		12	14	55	<
57	7	6		4		2	<64inicio

(FINAL 2)

Ahora nos situaremos en el extremo superior derecho (**S-D**) y desplazándonos de derecha a izquierda (**D-I)** contaremos los números 1, 2, 3, …, 64 y llenaremos los números impares que faltan (**F**).

1	58	62	5	60	3	63	<8 inicio
56	10	54	13	52	51	15	<9
48	23	19	44	45	22	42	<17
40	31	38	28	29	27	34	<33
25	39	30	36	37	35	26	<32
24	47	43	21	20	46	18	<41
16	50	11	53	12	14	55	<49
57	7	6	61	4	59	2	<64

Note que la suma de las filas y diagonales principales es 260, mientras que las columnas no suman el número mágico.

Para llegar a la solución del cuadrado mágico tenemos que intercambiar los valores de C(N) = $\frac{N}{2}$ celdas de cuadrado mágico anterior, en la siguiente tabla se muestra la posición de las celdas que tenemos que intercambiar:

Total de celdas Intercambiadas	Posición de la celda		Intercambiar por	Posición de la celda	
X	Fila	Columna		Fila	Columna
1	4	1	……………….	4	8
2	8	2	……………….	8	7
3	2	3	……………….	2	6
4	6	4	……………….	6	5

Esto implica que tenemos que intercambiar C(N) = 4 celdas:

1) El valor de la celda en la posición (4,1) “40” con el valor de la celda en la posición (4,8) “33”.

2) El valor de la celda en la posición (8,2) “7” con el valor de la celda en la posición (8,7) “2”.

3) El valor de la celda en la posición (2,3) “54” con el valor de la celda en la posición (2,6) “51”.

4) El valor de la celda en la posición (6,4) “21” con el valor de la celda en la posición (6,5) “20”.

Luego de hacer estos cambios obtenemos el cuadrado mágico solución:

1	58	62	5	60	3	63	<8 inicio
56	10	51	13	52	54	15	<9
48	23	19	44	45	22	42	<17
33	31	38	28	29	27	34	<40
25	39	30	36	37	35	26	<32
24	47	43	20	21	46	18	<41
16	50	11	53	12	14	55	<49
57	2	6	61	4	59	7	<64

Note que ahora la suma de todas las filas, columnas y diagonales principales es 260.

Si observamos detenidamente los cambios de valores obtenemos la siguiente relación:

Total de celdas intercambiadas	Posición de la celda		Intercambiar por	Posición de la celda	
X	Fila	Columna		Fila	Columna
1	N/2	X	……………….	N/2	N
2	N-(X-2)	X	……………….	N-(X-2)	N-(X-1)
3	X-1	X	……………….	X-1	N-(X-1)
4	N-(X-2)	X	……………….	N-(X-2)	N-(X-1)

Ejemplo 2: Cuadrado Mágico de orden N = $4 \times 3 = 12$, n = 3, para esto usaremos el algoritmo de la **TABLA 2.**

En este cuadrado mágico el número mágico esta dado por $M(N) = \frac{12^3 + 12}{2} = 870$.

(PASO 1)

Comenzaremos escribiendo el número 1 en el extremo superior izquierdo (**S-I**) y desplazándonos de izquierda a derecha (**I-D**) y contando los números 1, 2, 3, …, 144 llenaremos las celdas correspondientes a las diagonales principales (**DP),** dejando las otras celdas vacías**.**

1>inicio											12
>	14									23	
>		27							34		
>			40					45			
>				53			56				
>					66	67					
>					78	79					
>				89			92				
>			100					105			
>		111							118		
>	122									131	
133>											144

(PASO 2) El Número de Vueltas esta dado por $V(3)=2\times3-3=3$ e indica que tendremos que zigzaguear tres veces "hacer el **PASO 2** una vez y luego hacer el **PASO 2.1**". Para llenar las diagonales interiores 1, 2 y 3 y las diagonales exteriores 1, 2 y 3 respectivamente.

(**PASO 2.1**)

Ahora nos situaremos en el extremo inferior derecho (**I-D**) y desplazándonos en zig-zag (**Z-Z)** contaremos los números 1, 2, 3, …, 144 y llenaremos la diagonal interior 1 (**Di 1**) y la diagonal exterior 1 (**De 1**).

1>	134									143	12
	14	130							123	23	<
>		27	112					117	34		
			40	104			101	45			<
>				53	90	91	56				
84					66	67					<73
61>					78	79					72
				89	55	54	92				<
>			100	41			44	105			
		111	33					28	118		<
>	122	15							22	131	
133	11									2	<144inicio

(**PASO 2.2**)

Ahora nos situaremos en el extremo superior derecho (**S-D**) y desplazándonos en zig-zag (**Z-Z)** contaremos los números 1, 2, 3, …, 144 y llenaremos la diagonal interior 2 (**Di 2**) y la diagonal exterior 2 (**De 2**). .

1	134	10							3	143	<12inicio
>	14	130	16					21	123	23	
		27	112	32			29	117	34		<
>			40	104	42	43	101	45			
60				53	90	91	56				<49
84>	62				66	67				71	73
61	83				78	79				74	<72
85>				89	55	54	92				96
			100	41	103	102	44	105			<
>		111	33	113			116	28	118		
	122	15	129					124	22	131	<
133>	11	135							142	2	144

(**PASO 2.1**)

Ahora nos situaremos en el extremo superior inferior (**I-D**) y desplazándonos en zig-zag (**Z-Z)** contaremos los números 1, 2, 3, …, 144 y llenaremos la diagonal interior 2 (**Di 3**) y la diagonal exterior 2 (**De 3**). .

1	134	10	136					141	3	143	12
	14	130	16	128			125	21	123	23	
		27	112	32	114	115	29	117	34		
108			40	104	42	43	101	45			97
60	86			53	90	91	56			95	49
84	62	82			66	67			75	71	73
61	83	63			78	79			70	74	72
85	59			89	55	54	92			50	96
37			100	41	103	102	44	105			48
		111	33	113	31	30	116	28	118		
	122	15	129	17			20	124	22	131	
133>	11	135	9					4	142	2	144

(FINAL 1)

Ahora nos situaremos en el extremo inferior derecho (**I-D**) y desplazándonos de derecha a izquierda (**D-I)** contaremos los números 1, 2, 3,…, 144 y llenaremos las celdas pares que faltan por llenar (**F**).

1	134	10	136	140		138		141	3	143	<12
132	14	130	16	128		126	125	21	123	23	<
120		27	112	32	114	115	29	117	34	110	<
108		106	40	104	42	43	101	45		98	<97
60	86	94		53	90	91	56	88		95	<49
84	62	82		80	66	67		76	75	71	<73
61	83	63		68	78	79		64	70	74	<72
85	59	58		89	55	54	92	52		50	<96
37		46	100	41	103	102	44	105		38	<48
36		111	33	113	31	30	116	28	118	26	<
24	122	15	129	17		18	20	124	22	131	<
133>	11	135	9	8		6		4	142	2	<144

(FINAL 2)

Ahora nos situaremos en el extremo inferior superior (**S-D**) y desplazándonos de derecha a izquierda (**D-I)** contaremos los números 1, 2, 3,…, 144 y llenaremos las celdas impares que faltan por llenar (**F**).

1	134	10	136	140	7	138	5	141	3	143	<12
132	14	130	16	128	19	126	125	21	123	23	<13
120	35	27	112	32	114	115	29	117	34	110	<25
108	47	106	40	104	42	43	101	45	39	98	<97
60	86	94	57	53	90	91	56	88	51	95	<49
84	62	82	69	80	66	67	65	76	75	71	<73
61	83	63	81	68	78	79	77	64	70	74	<72
85	59	58	93	89	55	54	92	52	87	50	<96
37	107	46	100	41	103	102	44	105	99	38	<48
36	119	111	33	113	31	30	116	28	118	26	<109
24	122	15	129	17	127	18	20	124	22	131	<121
133>	11	135	9	8	139	6	137	4	142	2	<144

Note que la suma de las filas y diagonales principales es 870, mientras que las columnas no suman el número mágico.

Para llegar a la solución del cuadrado mágico tenemos que intercambiar los valores de $C(N) = \frac{N}{2}$ celdas de cuadrado mágico anterior, en la siguiente tabla se muestra la posición de las celdas que tenemos que intercambiar:

Total de celdas intercambiadas	Posición de la celda		Intercambiar por	Posición de la celda	
X	Fila	Columna		Fila	Columna
1	6	1	……………….	6	12
2	12	2	……………….	12	11
3	2	3	……………….	2	10
4	10	4	……………….	10	9
5	4	5		4	8
6	8	6		8	7

Esto implica que tenemos que intercambiar X = 6 celdas:
1) El valor de la celda en la posición (6,1) "73" con el valor de la celda en la posición (6,12) "84".

2) El valor de la celda en la posición (12,2) "11" con el valor de la celda en la posición (12,11) "2".

Y así sucesivamente hasta completar 6 intercambios.

Luego de hacer estos cambios obtenemos el cuadrado mágico solución:

1	134	10	136	140	7	138	5	141	3	143	12
132	14	123	16	128	19	126	125	21	130	23	13
120	35	27	112	32	114	115	29	117	34	110	25
108	47	106	40	101	42	43	104	45	39	98	97
60	86	94	57	53	90	91	56	88	51	95	49
73	62	82	69	80	66	67	65	76	75	71	84
61	83	63	81	68	78	79	77	64	70	74	72
85	59	58	93	89	54	55	92	52	87	50	96
37	107	46	100	41	103	102	44	105	99	38	48
36	119	111	28	113	31	30	116	33	118	26	109
24	122	15	129	17	127	18	20	124	22	131	121
133	2	135	9	8	139	6	137	4	142	11	144

Note que ahora la suma de todas las filas, columnas y diagonales principales es 870.

Si observamos detenidamente los cambios de valores obtenemos la siguiente relación:

Total de celdas intercambiadas	Posición de la celda		Intercambiar por	Posición de la celda	
X	Fila	Columna		Fila	Columna
1	N/2	X	……………….	N/2	N
2	N-(X-2)	X	……………….	N-(X-2)	N-(X-1)
3	X-1	X	……………….	X-1	N-(X-1)
4	N-(X-2)	X	……………….	N-(X-2)	N-(X-1)
5	X-1	X	……………….	X-1	N-(X-1)
6	N-(X-2)	X	……………….	N-(X-2)	N-(X-1)

Observe cuando X = 5 y 6 los intercambios de las posiciones de las celdas son iguales a los intercambios de las posiciones de las celdas cuando X = 3 y 4.

Podemos generalizar que para llegar a una nueva solución de los cuadrados mágicos de orden $N = 4 \times n,\ n \geq 2$, utilizamos el algoritmo de la **TABLA 2** "cuadrados de orden N = 4n + 2" definiendo el número de vueltas como V(n)=2n-3 "se crea un cuadrado mágico donde la suma de las filas y diagonales principales dan el número mágico". Para llegar al cuadrado mágico solución tomamos el cuadrado mágico descrito anteriormente y intercambiar los valores de C(N) = $\frac{N}{2}$ celdas de este cuadrado como se muestra a continuación:

Total de celdas intercambiadas	Posición de la celda		Intercambiar por	Posición de la celda	
X	Fila	Columna		Fila	Columna
1	N/2	X	……………….	N/2	N
2	N-(X-2)	X	……………….	N-(X-2)	N-(X-1)
3	X-1	X	……………….	X-1	N-(X-1)
4	N-(X-2)	X	……………….	N-(X-2)	N-(X-1)
.	X-1	X	……………….	X-1	N-(X-1)
.	N-(X-2)	X	……………….	N-(X-2)	N-(X-1)
C(N) - 1	X-1	X	……………….	X-1	N-(X-1)
C(N)	N-(X-2)	X	……………….	N-(X-2)	N-(X-1)

En el caso del cuadrado particular del cuadrado mágico de orden N = 4, utilizamos el algoritmo de la **Tabla 2** sin utilizar el paso 2 "NO HAY QUE DAR VUELTAS". Esto crea un cuadrado mágico donde las columnas y diagonales principales dan el número mágico "34".

(**Paso 1**)

1>inicio			4
>	6	7	
>	10	11	
13>			16

(Final 1)

1		14	<4
12	6	7	<
8	10	11	<
13		2	<16inicio

(Final 2)

1	3	14	<4inicio
12	6	7	<5
8	10	11	<9
13	15	2	<16

Para llegar al cuadrado mágico solución tomamos el cuadrado mágico descrito anteriormente e intercambiar los valores de C(N) = $\frac{N}{2}$ = 2 celdas de este cuadrado como se muestra a continuación:

1) El valor de la celda en la posición (1,2) “3” con el valor de la celda en la posición (4,2) “15”.

2) El valor de la celda en la posición (2,4) “5” con el valor de la celda en la posición (3,4) “9”.
Luego de los intercambios obtenemos el cuadrado mágico solución.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Note que ahora la suma de todas las filas, columnas y diagonales principales es 34.

TABLA 2
ORDEN
N = 4n + 2, n≥1

	PASO 1	**PASO 2 Número de Vueltas** V(n)=2n - 3		**FINAL 1**	**FINAL 2**
INICIO	S-I	I-D 2.1	S-D 2.2	S-D	I-D
MOVIMIENTO	I-D ini → →	Z-Z ← → ←ini	Z-Z ← ini → ←	D-I ←ini ←	D-I ← ←ini
ACCION	LLENAR DP	LLENAR DI +DE	LLENAR DI2+DE2	LLENAR PARES F	LLENAR IMPARES F

El número de vueltas V(n) es el número veces que hay que zigzaguear. El PASO 2 se repite 2n-3 veces, para llenar las diagonales interiores y exteriores que falten.