

Tema 1: Equacions i problemes de primer grau.

1.1. Igualtats, identitats i equacions.

Dues expressions separades pel signe = és una **igualtat**.

Les igualtats poden ser **numèriques** (només contenen números) o **literals** (contenen números i lletres).

Exemples:

- 1) $7 - 5 = 2$ és una igualtat numèrica.
- 2) $L = 2\pi R$ és una igualtat literal que ens dóna la longitud d'una circumferència de radi R.

Les igualtats poden ser certes o falses.

Les igualtats literals poden ser:

- a) **Identitats**, quan la igualtat es verifica per a qualsevol valor de les lletres que intervenen.

Exemple: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ és una identitat ja que és certa per a qualsevol valor d'a i b.

- b) **Equació**, quan la igualtat es verifica només per a algun valor de les lletres. En tal cas, les lletres reben el nom d'incògnites de l'equació.

Exemple: $2x + 3 = 1 + 3x$ és una equació ja que aquesta igualtat només és certa per a $x = 2$. En aquest cas, $x = 2$ és la solució de l'equació.

Al substituir les solucions en l'equació obtenim una igualtat certa..

Existeixen diferents criteris per classificar les equacions: segons el nombre d'incògnites, segons el seu grau, segons el nombre de solucions...

Exemple: L'equació $x^2 - 5x + 6 = 0$ és una equació amb una incògnita, de segon grau i amb dues úniques solucions $x = 2$ i $x = 3$, és per aquest motiu que diem que es tracta d'una equació compatible determinada.

Atès que les equacions poden tenir o no solució, les podem classificar com...

- a) **Equacions compatibles** (tenen solució). Si tenen un nombre finit de solucions, diem que es tracta d'una **equació compatible determinada**, mentre que si té infinites solucions, diem que es tracta d'una **equació compatible indeterminada**.
- b) **Equacions incompatibles** (no tenen solució).

Exemples:

- 1) Les equacions següents són compatibles determinades.

L'equació $x + 2 = 5$ és una equació de primer grau amb una incògnita que té com a única solució $x = 3$.

L'equació $x^2 - 4 = 0$ és una equació de segon grau amb una incògnita que té com a solucions $x = 2$ i $x = -2$.

- 2) L'equació $x - y = 0$ és una equació de primer grau amb dues incògnites que tenim infinites solucions (és compatible indeterminat), totes elles tenen com a valors de x els mateixos que y .
- 3) L'equació $2x + 2 = 2x - 1$ és una equació de primer grau amb una incògnita que no té solució (és incompatible).

1.2. Resolució d'una equació de primer grau.

Dues equacions són **equacions equivalents** si tenen les mateixes solucions.

Exemple: L'equació $3x + 2 = 2x + 5$ té com a única solució $x = 3$. Una equació equivalent seria $x - 3 = 0$, i una altra $2x - 1 = 5$, ja que totes dues tenen com a única solució $x = 3$.

El procés que ens ha de permetre trobar les solucions d'una equació es basa en les operacions que ens permeten transformar l'equació en una altra d'equivalent. Aquestes operacions són:

- 1) Si sumem o restem els dos membres de l'equació per un mateix nombre o expressió, obtenim una altra equació d'equivalent.
- 2) Si multipliquem o dividim els dos membres de l'equació per un mateix nombre, obtenim una altra equació d'equivalent.

Exemples:

- 1) Anem a resoldre l'equació $7x - 5 = 3x + 3$.
 - Sumem 5 ambdós membres de l'equació: $7x = 3x + 8$.
 - Restem $3x$ ambdós membres de l'equació: $4x = 8$.
 - Dividim per 4 ambdós membres de l'equació: $x = 2$.La solució de l'equació és $x = 2$, ja que si substituïm x per 2 en l'equació inicial surt una igualtat certa. Comprovem-ho: $14 - 5 = 6 + 3$.
- 2) L'equació $5x - 10 = 2x + 3$ té com a solució $x = 13/3$. Només cal que sumem 10 i restem $2x$ als dos membres de l'equació, i després dividim per 3.

1.3. Altres formes d'equacions que són també de primer grau.

1.3.1. Equacions amb parèntesis.

Exemple: Anem a resoldre l'equació $5 \cdot (x - 2) = 2 + 3 \cdot (1 - x)$
Hem d'aplicar la propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma, així doncs, tenim: $5x - 10 = 2 + 3 - 3x$,
és a dir, $5x - 10 = 5 - 3x$.
Sumant 10 als dos membres de l'equació, obtenim: $5x = 15 - 3x$.
Sumant $3x$, obtenim: $8x = 15$.
I, si dividim per 8, obtenim la solució de l'equació: $x = 15/8$.

1.3.2. Equacions amb denominadors.

Exemple: Anem a resoldre l'equació $\frac{x-1}{3} + \frac{x+2}{6} = \frac{3x-2}{2}$

Abans de començar a resoldre l'equació reduïrem a comú denominador. En aquest cas, el comú denominador és 6.

Si multipliquem els dos membres de l'equació per 6, tenim:

$$2 \cdot (x-1) + (x+2) = 3 \cdot (3x-2).$$

Ens trobem en una situació semblant a l'apartat 1.3.2., i actuant de forma semblant, tenim; $2x - 2 + x + 2 = 9x - 6$, és a dir, $3x = 9x - 6$.

Restant $9x$ als dos membres de l'equació, tenim: $-6x = -6$.

I dividint per -6 , tenim que la solució de l'equació és $x = 1$.

1.3.3. Equacions en forma de proporció.

Exemple: Anem a resoldre l'equació $\frac{2x-1}{3} = \frac{x+1}{2}$

Multipliquem en creu, tenim: $2 \cdot (2x - 1) = 3 \cdot (x + 1)$, i aplicant la propietat distributiva, tenim: $4x - 2 = 3x + 3$.

Sumant 2 i restant $3x$ als dos membres de l'equació tenim: $x = 5$.

1.3.4. Equacions de primer grau que no ho semblen.

Exemple: Anem a resoldre l'equació $(x+1) \cdot (x-1) = 1 + x + x^2$

Com $(x+1) \cdot (x-1) = x^2 - 1$, tenim: $x^2 - 1 = 1 + x + x^2$.

Restant $1 + x^2$ als dos membres de l'equació, tenim: $-2 = x$.

D'aquí que la solució sigui $x = -2$.

1.4. Problemes que es resolen mitjançant equacions de primer grau.

El següent decàleg ens dona un procés a seguir per a poder resoldre problemes:

1. Llegiu el problema amb molta atenció fins entendre'l perfectament.
2. Diferencieu les dades que et donen de les que et demanen.
3. Utilitzeu lletres per a representar les incògnites.
4. Utilitzeu dibuixos, taules o esquemes gràfics on surtin les dades i les incògnites.
5. En el vostre procés reflexiu, utilitzeu els coneixements adquirits en altres problemes resolts.
6. Escriviu les condicions del problema en forma d'igualtats tot traduint-les al llenguatge algèbric.
7. Resoleu correctament l'equació plantejada.
8. expresseu degudament la solució i analitzeu-la.
9. Comproveu que la vostra resposta verifica les condicions de l'enunciat del problema.
10. Si no heu tingut èxit, torneu a començar.

Exemple:

Un pare té actualment 5 vegades l'edat de la seu fill. D'aquí a 3 anys, la seva edat serà 4 vegades més gran. Quina és l'edat actual del pare i del fill?

Recollim la informació en forma de taula, tenint en compte que el temps passa igual per a tots dos i que el problema ens planteja una relació entre l'edat del pare i del fill d'aquí a tres anys.

	Edat actual	Edat d'aquí a 3 anys
Pare	$5x$	$5x + 3$
Fill	x	$x + 3$

De l'enunciat es desprèn que: $5x + 3 = 4 \cdot (x + 3)$, és a dir, $5x + 3 = 4x + 12$.

Resolent l'equació, tenim que $x = 9$.

La resposta al problema seria: El fill té actualment 9 anys i el pare 45 anys.

Comprovació:

D'aquí a tres anys, el pare tindrà 48 anys i el fill 12 anys. Això ens porta a que el pare tindrà efectivament 4 vegades l'edat del fill.

EXERCICIS:

1.1. Indiqueu quina o quines de les següents igualtats són equacions i quines són identitats:

- a) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
- b) $3 \cdot (2x + 1) = 3x + 15$
- c) $2x - 3 = 2 - 5 \cdot (1 - x)$
- d) $(x + 2) \cdot (x - 2) = x^2 - 4$
- e) $12 - 3x = 15 - 2x$
- f) $x^2 - 3x = x \cdot (x - 3)$

1.2. De les equacions de l'exercici anterior se sap que només tenen una solució i que cadascun dels números -3 , 0 i 4 és solució d'una d'elles. Assigneu a cada equació la seva solució.

1.3. Expresseu en llenguatge algèbric:

- a) Dos números que es diferencien en 3 unitats.
- b) L'edat que tindrà en Pere dintre de 5 anys.
- c) El quadrat d'un número imparell.
- d) El cost de la compra de x Kg de taronges a $0,87$ € el quilogram i de y Kg de prunes a $1,10$ € el quilogram.
- e) El producte de dos números enters consecutius.
- f) L'àrea d'un rectangle de base x i altura 3 unitats menys.

1.4. Resoleu les següents equacions de primer grau:

- a) $3 + 5x = 1 - 3x$
- b) $100 = 1 - 3x$
- c) $3x + 4 = 1 - 6x + 2 \cdot (x - 1)$
- d) $-12 + 2x = 12 - 3x$
- e) $12x - 2 \cdot (2 + x) - 3x = 1 + 2x$
- f) $1 - 2x - 5 \cdot (1 - x) = 2 \cdot (1 - 2x) + 7$
- g) $3x + 5 = -\frac{7}{9}$

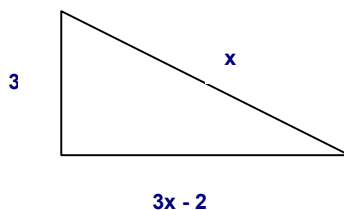
h) $-7x - 4 = 2 \cdot \left(4 - \frac{1}{5} \cdot x \right)$

i) $\frac{3}{2} \cdot (x - 4) - 2 \cdot (2x + 3) = 5x + 1$

j) $\frac{1}{4} \cdot (x + 4) - \frac{1}{20} \cdot (x - 60) = \frac{2}{5} \cdot (x + 15)$

k) $(x - 1) \cdot (x - 2) = (x - 4) \cdot (x - 5)$

- 1.5. Hem afegit 17 a un nombre enter, hem multiplicat el resultat per 2 i ens ha donat 48. Quin era el nombre?
- 1.6. En un jardí, la tercera part de la superfície és coberta de flors, una sisena part de plantes verdes i la resta, 150 m^2 , de gespa. Es demana:
- Si x és la superfície de jardí, doneu l'equació que correspon a aquest enunciat.
 - Trobeu la superfície del jardí.
- 1.7. El perímetre del triangle rectangle de la figura adjunta és $x + 7 \text{ cm}$. Quin és el valor de x ?



- 1.8. La recaptació d'un concert al Palau Sant Jordi ha estat de 219000 €. Hi ha dos tipus d'entrades, una a 30 € i l'altra a 18 €. Si sabem que en total han assistit 10000 persones al concert, quin és el número de persones que van comprar cada tipus d'entrada?
- 1.9. Descomponeu el número 30 en dues parts de tal forma que el triple de la primera part més el doble de la segona sigui 80.
- 1.10. Una prova consta de 12 qüestions. Per cada qüestió correcta, l'alumne guanya 3 punts, però per cada qüestió incorrecta o no contestada, en perd 2. Si al final de la prova l'alumne aconsegueix 11 punts, quantes qüestions ha contestat correctament?
- 1.11. El triple de l'edat d'en Bernat fa 4 anys és el doble de l'edat que tindrà d'aquí a 8 anys. Quants anys té actualment en Bernat?
- 1.12. Dos dels angles d'un triangle es diferencien en 10° . Si el tercer angle és el doble de l'angle més petit dels dos primers, quina és la mesura dels tres angles del triangle?

- 1.13. Reparteix 3000 € entre dues persones de manera que a una li correspongui els $\frac{2}{3}$ del que li correspongui a l'altra.
- 1.14. Un disc de Sopa de Cabra està rebaixat en un 12% i hem pagat 14,52 €. Quin era el preu del disc abans de la rebaixa?
- 1.15. Heu decidit fer un viatge. El primer dia gasteu $\frac{2}{5}$ dels diners que portaveu, el segon dia la meitat del que us quedava i encara disposeu de 24 €. Quants diners portàvem en un principi?
- 1.16. En una família el pare té 40 anys, el fill en té 6 i la filla 16. L'avi acaba de fer el 86è aniversari. Es demana:

a) Ompliu el quadre següent:

	Pare	Fill	Filla	Avi
Edat actual				
Edat dins de x anys				

- b) D'aquí a quants anys l'edat del pare serà el triple de la del fill?
 c) D'aquí a quants anys l'edat del pare serà el triple de la del filla?
 d) D'aquí a quants anys l'edat de l'avi serà el triple de la del fill?

EXERCICIS COMPLEMENTARIS:

I.1. Resoleu les següents equacions:

a) $17x - 5 \cdot (3x + 1) - 2x = 123$

b) $6 \cdot (x - 7) + 2 \cdot (4 - 3x) = 17$

c) $\frac{x-1}{2} + 3x = \frac{x}{4} - 2 \cdot (x+1)$

d) $\frac{x+3}{2} - \frac{5x+4}{3} = 2x-1$

e) $\frac{3x}{2} + \frac{2x+3}{4} = 5 \cdot (x+2)$

e) $\frac{1}{2} \cdot \left(2x + \frac{4}{3} \right) = 1 - 4x$

I.2. Un club esportiu ha comprat 24 samarretes i 6 pilotes per un total de 138,60 €. El preu d'una samarreta representa els dos terços del preu d'una pilota. Quant val una samarreta? Quant val una pilota?

I.3. Un cert capital dipositat a un banc a un interès del 6% ens ha donat els mateixos interessos que 2400 € al 5%. Calculeu el valor d'aquest capital?

I.4. Volem repartir 280 € entre tres amics A, B i C. La part que correspon a A és la meitat de la part de B. La part que li correspon a B és la meitat de la part que li toca a C. Quant li correspon a cadascú?

I.5. ABCD i AEFG són dos rectangles. Sabem que la part ombrejada del dibuix adjunt té un àrea de 20 cm^2 . Quant amida la longitud del segment AG?

