Tema 2: Equacions i problemes de segon grau.

2.1. Les equacions de 2n grau.

Equacions del tipus $2x^2 + 5x - 3 = 0$, on la incògnita x es troba elevada al quadrat, diem que són equacions de segon grau.

Exemples:

1) L'equació $x^2 + 5x + 6 = 0$ és una altra equació de segon grau.

2) L'equació $2x\cdot(1-x) + 2 = x + 1$, també és de segon grau, doncs, un cop reduïts els seus termes semblants ens queda així:

$$2x - 2x^2 + 2 = x + 1$$
$$-2x^2 + 2x - x + 2 - 1 = 0$$
$$-2x^2 + x + 1 = 0$$

ACTIVITAT 2.1.

Reduïu els termes semblants en les següents equacions, classifiqueu-les en equacions de primer o de segon grau i resoleu només aquelles que siguin de primer grau.

a) $2 + 3x\cdot(x + 2) = 1 + 3x^2$.

b) $\frac{1}{x-1} - 5 = \frac{3}{2}$.

c) $x\cdot(x + 2) = 2 - 3x$.

d) $3\cdot(x2 - 4) = 1 - 2x\cdot(1 - \frac{3}{2}x)$

L'expressió general d'una equació de segon grau és $ax^2 + bx + c = 0$. Pot donar-se el cas que el coeficient b, o bé, el terme independent c siguin zero, en tal cas parlem d'equacions de segon grau incompletes, aquestes prenen la forma general:
1) Si $b = 0$, $ax^2 + c = 0$.
2) Si $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$.
Trobar la solució en aquests dos casos requereix d'un procediment molt senzill.

Exemples:

1) Anem a resoldre l'equació $9x^2 - 4 = 0$.
En aquest cas procedirem així:
(1) Passem el terme independent a l'altre membre de la igualtat: $9x^2 = 4$.
(2) Aïllem la x^2: $x^2 = \frac{4}{9}$.
(3) Traiem l'arrel quadrada als dos membres de la igualtat: $x = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} = \pm\frac{2}{3}$.

2) Les solucions de l'equació $3x^2 + 2x = 0$ es troben fent servir el procediment següent:
(1) Traiem factor comú de x: $x\cdot(3x + 2) = 0$.
(2) Igualem a zero cada un dels dos factors: $x = 0$ i $3x + 2 = 0$.
(3) Una de les solucions ja és $x = 0$, mentre que l'altra surt de resoldre una senzilla equació de primer grau, així doncs, tenim: $x = \frac{-2}{3}$.

Altres equacions de segon grau es poden presentar en la forma:

$(mx + n)^2 = p$, o bé, $(mx + n)\cdot(px + q) = 0$.

La seva resolució està basada en els procediments comentats en els dos casos anteriors.

ACTIVITAT 2.2.

Resoleu les següents equacions de segon grau incompletes:

a) $6x^2 - 9x = 0$.

b) $8x^2 - 32 = 0$.

c) $(x - 1)^2 = 9$.

d) $(2x + 3)\cdot(x - 5) = 0$.

Ara estaria bé que ens preguntéssim que hem de fer per trobar les solucions d'una equació de segon grau que tingui tots els seus termes. En aquests casos tenim una fórmula miraculosa que ens dóna les solucions: *" Si l'equació de segon grau és $ax^2 + bx + c = 0$, les solucions s'obtenen aplicant la fórmula següent:*

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Exemple:

Anem a resoldre l'equació: $x^2 + 5x + 6 = 0$.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \rightarrow x = -2 \text{ i } x = -3.$$

ACTIVITAT 2.3.

Resoleu les següents equacions de segon grau:

a) $x^2 - 2x - 48 = 0$.

b) $x\cdot(2x + 3) + 6x^2 = 9x - 1$.

c) $x^2 + 3 = 2 - x$.

d) $x2 + 4x + 4 = 0$

Ja hem vist com determinar les solucions d'una equació de segon grau, i hem pogut comprovar que existeixen algunes equacions amb dues solucions diferents, d'altres que només en tenen una i d'altres que no en tenen cap.

Una manera de conèixer el nombre de solucions d'una equació de segon grau sense haver de resoldre-la consisteix en calcular el valor de $b^2 - 4ac$ (discriminant de l'equació). Pot passar:

a) Si $b^2 - 4ac > 0$, l'equació té dues solucions diferents.
b) Si $b^2 - 4ac = 0$, l'equació té una única solució.
c) Si $b^2 - 4ac < 0$, l'equació no té solució.

ACTIVITAT 2.4.

Esbrinar el nombre de solucions de les següents equacions:

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$.

b) $2x^2 - x + 3 = 0$.

c) $15x^2 - x - 6 = 0$.

2.2. Problemes que es resolen mitjançant equacions de segon grau.

Per resoldre problemes cal que recordeu que és molt important:
1) Llegir i rellegir molt atentament l'enunciat del problema.
2) Diferenciar les dades de la incògnita.
3) Utilitzar lletres per a les incògnites, especificant clarament que representen.
4) Utilitzar dibuixos o gràfics on apareguin les dades i les incògnites sempre que el problema ho requereix, sobre tot si aquest problema és geomètric.
5) Plantejar l'equació.
6) Resoldre l'equació.
7) No deixar de comprovar la solució. És possible que alguna de les solucions trobades no tinguin sentit en el context del problema.
8) Expressar clarament la resposta.

ACTIVITAT 2.5.
Plantegeu l'equació de segon grau resultant dels problemes següents i doneu les solucions:
a) Trobeu un nombre enter tal que el doble del seu quadrat sigui sis vegades aquest nombre.
b) La suma dels quadrats de dos nombres consecutius és 265. Trobeu aquests nombres.

ACTIVITAT 2.6.
Una antiga bassa circular de 13 metres de diàmetre es vol aprofitar per convertir-la en piscina rectangular de manera que un costat faci 7 metres més que l'altre i que la diagonal del rectangle sigui la diàmetre de la bassa. Quines són les dimensions de la piscina?.

ACTIVITAT 2.7.
Un grup d'amics paga 3900 € per un regal col·lectiu. A l'hora de pagar, dos d'ells no hi són i cada un dels altres es veuen obligats ha pagar 325 € més del que havien comptat. Quants amics formaven el grup inicial?.

2.3. Altres tipus d'equacions: biquadrades, racionals, irracionals, de grau superior a dos (incompletes).

Hi ha problemes que cal resoldre plantejant equacions que no són ni de primer ni de segon grau. Algunes tenen la seva resolució força senzilla, i solen reduïr-se a equacions de segon grau, entre aquestes es troben: algunes equacions de tercer grau, les equacions biquadrades i les equacions irracionals.

Exemples:

1) L'equació $x^3 - 3x = 0$ és una **equació de tercer grau incompleta**. Observeu com es resolt:
Traiem la x com a factor comú: $x(x^2 - 3) = 0 \rightarrow x = 0$, o bé, $x^2 - 3 = 0$.
$x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$.
Les solucions de l'equació de tercer grau són: $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$ i $x_3 = -\sqrt{3}$.

2) L'equació $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ és una **equació biquadrada**. Observeu com es resolt:
Fent el canvi $t = x^2$ i substituint en l'equació, tenim: $t^2 - 3t - 4 = 0$, d'on:
$t = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \rightarrow t_1 = 4$ i $t_2 = -1$.
$t_1 = 4 = x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.
$t_2 = -1 = x^2 \rightarrow$ Aquesta equació no té solució.
Les solucions de l'equació biquadrada són: $x_1 = 2$ i $x_2 = -2$.

3) L'equació $\sqrt{x-1}+3=x$ és una **equació irracional**. Observeu com es resolt:
Aïllem l'expressió que té l'arrel quadrada: $\sqrt{x-1}=x-3$.
Si elevem al quadrat els dos membres de la igualtat, l'arrel desapareix:

$$x–1 = (x–3)^2.$$

Reduint els termes semblants, tenim: $x-1 = x^2 - 6x + 9 \rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$.

$x = \dfrac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\dfrac{7\pm3}{2} \rightarrow x_1 = 5$ i $x_2 = 2$.

En aquest tipus d'equacions es fa imprescindible comprovar les solucions que hem trobat, doncs, no sempre són vàlides. Així, tenim:

Si x = 5: $\sqrt{5-1}=5-3 \rightarrow \sqrt{4}=2 \rightarrow$ certa.

Si x = 2: $\sqrt{2-1}=2-3 \rightarrow \sqrt{1}=-1 \rightarrow$ falsa.

L'única solució de l'equació irracional és: x = 5.

4) L'equació $2+\dfrac{12}{x-3}=x+3$ és una **equació racional**. Observeu com es resolt:
Multiplicant els dos membres de la igualtat per $x - 3$, tenim:

$$(x-3)\cdot\left(2+\frac{12}{x-3}\right)=(x-3)\cdot(x+3)$$

d'on: $2\cdot(x - 3) + 12 = x^2 - 9$, i operant i reduint els termes, quan els passem a un membre de la igualtat, ens queda: $x^2 - 2x - 15 = 0$.
Com és una equació de segon grau, tenim:

$$x = \frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{2\pm8}{2}=\begin{cases}x_1=5\\x_2=-3\end{cases}$$

ACTIVITAT 2.8.
Resoleu les següents equacions:

a) $x^4 - 4x^2 = 0$

b) x4 – 5x2 + 4 = 0

c) $\sqrt{x+3}-x=x$

d) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x}{x-2}=1$

ACTIVITAT 2.9.
Una avia compra llaminadures per als seus néts per valor de 2 €. Si cada llaminadura hagués costat 5 cèntims d'euro menys, hauria pogut comprar dues més. Quantes llaminadures ha comprat? Quin preu té cada llaminadura?

ACTIVITAT 2.10.
L'edat d'una noia és igual a l'arrel quadrada de l'edat de la seva mare. D'aquí a 7 anys l'edat de la mare serà quatre vegades la de la noia. Trobeu les edats de totes dues.

EXERCICIS:

2.1. Resoleu les següents equacions de segon grau:

a) $4x^2 - 1 = 0$

b) $x^2 - 9 = 0$

c) $3x^2 - 2x = 0$

d) $6x^2 + x = 0$

e) $1 + 3x - x^2 = 5 + 3\cdot(x^2 + x + 4)$

f) $x^2 + 5x + 6 = 0$

g) $3x^2 - 5x - 2 = 0$

h) $3x - 2x^2 = 5\cdot(x - x^2) + 2 - 3x$

i) $(x - 1)^2 - 5 = 0 \quad (3x + 2)^2 + 1 = 6$

j) $(2x - 1)^2 + 5\cdot(x+1)^2 = 6 + 2x$

k) $6\cdot(x - 1) + 2\cdot(x - 1)^2 = 0$

l) $\dfrac{x^2 - 2}{3} + \dfrac{3 - x}{2} = 1 - x$

2.2. Resoleu les següents equacions:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $4x^4 - 5x^2 - 9 = 0$

c) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

d) $x^3 - 5x^2 = 0$

e) $x^4 - 16 = 0$

f) $x^3 - 9x = 0$

g) $12x^5 + 3x^3 = 0$

h) $\sqrt{x+7} - x = 1$

i) $\sqrt{x+13} + x = 2x + 1$

j) $2\cdot\sqrt{x-3} - 3x = x - 14$

k) $\dfrac{x+3}{9} = \dfrac{4}{x+3}$

l) $\dfrac{x+1}{2} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$

2.3. Un camp rectangular té 2400 m^2 de superfície i 20 m més de llarg que d'ample. Trobeu les dimensions del camp.

2.4. Els costats d'un triangle rectangle mesuren, en cm, tres nombres enters consecutius. Trobeu la longitud dels tres costats.

2.5. Trobeu el nombre enter tal que sumat amb el seu invers dóna 2.

2.6. Trobeu dos nombres naturals tal que el seu producte sigui 168 i la seva diferència de quadrats sigui 52.

2.7. La base d'un rectangle fa 2 cm més que l'altura. Determineu les seves dimensions sabent que si augmentem la base en 3 cm i disminuïm l'alçada en 1 cm, l'àrea augmenta en 5 cm^2.

2.8. Quants metres de roba es poden comprar amb 43,2 € sabent que si el metro costés 0,54 € menys, se'n podrien comprar 4 metres més?

2.9. Uns amics han comprat gelats per un valor de 13,5 €. Si cada gelat costés 0,6 € menys, s'haurien pogut comprar 6 més. Quin és el preu del gelat? Quants amics són?

<u>EXERCICIS COMPLEMENTARIS</u>:

II.1. Resoleu les següents equacions:

a) $2x^2 + x - 1 = 0$

b) $(3x + 1)(2x + 4) = 0$

c) $(x - 10)^2 = 256$

d) $(x - 1)^2 + x^2 = 1$

II.2. Resoleu les següents equacions:

a) $8x^4 - x^2 - 7 = 0$

b) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 = 0$

c) $\frac{2x}{x+2} + \frac{x+2}{2x} = 2$

d) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$

II.3. Trobeu les dimensions d'un rectangle de perímetre 56 cm i d'àrea 180 cm^2.

II.4. L'edat d'un nen serà d'aquí a 3 anys un quadrat perfecte, i fa 3 anys serà justament l'arrel quadrada d'aquest quadrat. Quants anys té ara?

II.5. L'àrea del trapezi rectangular BCHM és igual a l'àrea del triangle AHM. Volem calcular la longitud x del segment AH.
Suggeriments:
a) Expresseu HC en funció de x (Teorema de Tales)
b) Poseu en forma d'equació el fet que les dues àrees són iguals.