

## **Tema 3: Sistemes d'equacions.**

### **3.1. Sistemes de dos equacions lineals amb dues incògnites.**

Una **equació lineal amb dues incògnites** és una igualtat del tipus  $ax + by = c$ , on  $a$ ,  $b$  i  $c$  són números reals, i,  $x$  i  $y$  les incògnites de l'equació.

Diem que  $x = x_0$  i  $y = y_0$  és una solució de l'equació si al substituir les incògnites  $x$  i  $y$  per  $x_0$  i  $y_0$  respectivament la igualtat és certa.

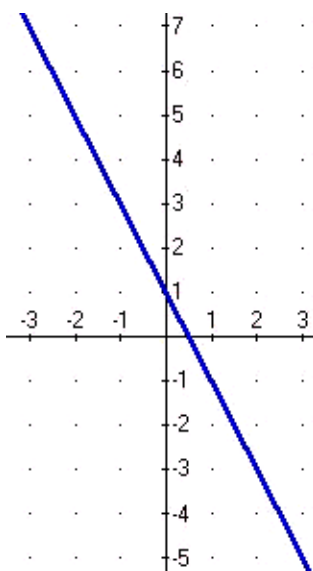
Aquest tipus d'equació sempre representen a una recta, i els punts d'aquesta recta són les solucions de l'equació. D'aquí que les equacions lineals amb dues incògnites tinguin sempre infinites solucions.

#### **Exemple:**

Per a obtenir les infinites solucions de l'equació lineal  $2x + y = 1$ , només cal aïllar una de les dues incògnites, per exemple la  $y$ , i donar valors a l'altra incògnita. Així doncs:

| $x$  | $y = 1 - 2x$ | Solucions            | Punts    |
|------|--------------|----------------------|----------|
| 0    | 1            | $x = 0$ i $y = 1$    | (0,1)    |
| 1    | -1           | $x = 1$ i $y = -1$   | (1,-1)   |
| 2    | 0            | $x = 2$ i $y = 0$    | (2,0)    |
| 3    | -5           | $x = 3$ i $y = -5$   | (3,-5)   |
| -1   | 3            | $x = -1$ i $y = 3$   | (-1,3)   |
| -1/2 | 2            | $x = -1/2$ i $y = 2$ | (-1/2,2) |
| ...  | ...          | ...                  | ...      |

Si representem els punts  $(x_0, y_0)$ , obtinguts a partir de les solucions de l'equació lineal, en uns eixos de coordenades, podem obtenir la recta que representa i que en el nostre cas seria:



Un **sistema de dues equacions lineals amb dues incògnites** està format per dues igualtats del tipus:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

La solució d'un sistema és el punt comú de les dues rectes que representen.

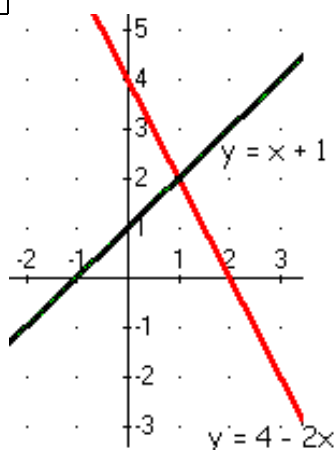
**Exemple:**

Si representem les rectes de les dues equacions del sistema  $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$ , obtindrem la seva solució.

Així doncs, tenim:

| x | y = 4 - 2x |
|---|------------|
| 0 | 4          |
| 2 | 0          |

| x  | y = x + 1 |
|----|-----------|
| 0  | 1         |
| -1 | 0         |



És fàcil observar que el punt on es tallen les dues rectes és (1,2), d'aquí que  $x = 1$  i  $y = 2$  sigui la solució del sistema.

**ACTIVITAT 3.1.**

Resoleu gràficament els següents sistemes d'equacions lineals:

a)  $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} -x + y = 3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

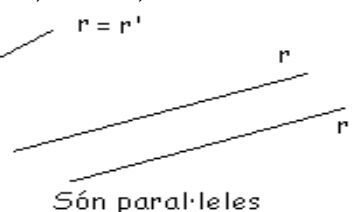
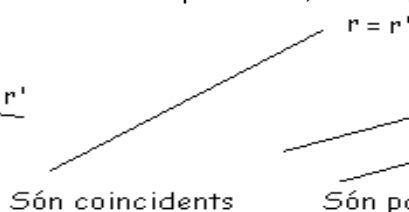
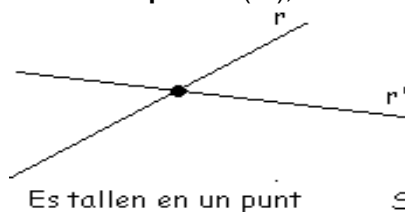
c)  $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} 5x + y = 0 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$

**Tipus de sistemes:**

Com molt bé sabem, dues rectes es poden tallar en un punt, poden ser dues rectes coincidents, o bé, poden ser dues rectes paral·leles. Segon el cas, estem davant d'un sistema amb una solució, infinites solucions, o bé, sense solució. Així doncs, diem que el sistema és un...

- a) **Sistema compatible determinat** (SCD), si les dues rectes es tallen en un punt, és a dir, el sistema només té una solució.
- b) **Sistema compatible indeterminat** (SCI), si les dues rectes són coincidents, és a dir, el sistema té infinites solucions.
- c) **Sistema incompatible** (SI), si les dues rectes són paral·leles, és a dir, el sistema no té solució.



### ACTIVITAT 3.2.

Representeu gràficament les rectes que defineixen els següents sistemes d'equacions i digueu de quin tipus és cadascun d'ells.

a)  $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ -6x + 2y = -1 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} 6x - 2y = 1 \\ -3x + y = -1/2 \end{cases}$

### Mètodes de resolució:

No sempre és fàcil resoldre un sistema de dos equacions lineals amb dues incògnites de manera gràfica representant les dues rectes. En el següent exemple podrem observar com no es podrà deduir amb certesa la solució del sistema.

#### Exemple:

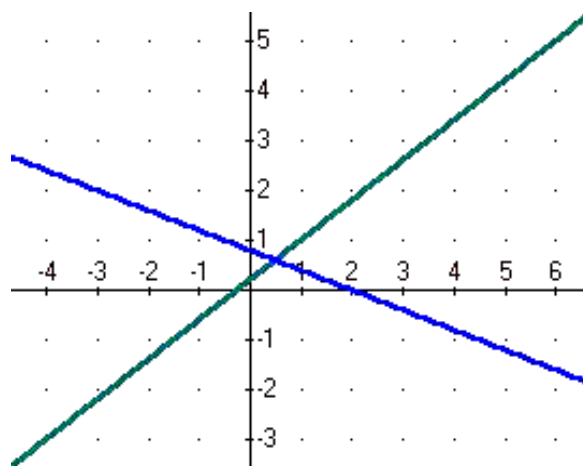
Considerem el sistema:

$$\begin{cases} 4x - 5y = -1 \\ 2x + 5y = 4 \end{cases}$$

La representació gràfica de les dues rectes és:

|    |                      |
|----|----------------------|
| x  | $y = \frac{4x+1}{5}$ |
| -4 | -3                   |
| 6  | 5                    |

|    |                      |
|----|----------------------|
| x  | $y = \frac{4-2x}{5}$ |
| -3 | 2                    |
| 2  | 0                    |



Com podem observar no és fàcil deduir la solució. Sembla ser que podria ser  $x = 1/2$  i  $y = 1/2$ , però això no és cert. Anem a comprovar-ho:

$$\begin{cases} 4 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \neq -1 \\ 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \neq 4 \end{cases}$$

- Comprovar que la solució és:  $x = 1/2$  i  $y = 3/5$ .

Existeixen tres mètodes algebrics per a resoldre aquest tipus de sistemes: el mètode de reducció, el mètode d'igualació i el mètode de substitució. Tots tres mètodes tenen un mateix objectiu: transformar el sistema en un altre que sigui equivalent i que tingui una de les equacions amb una sola incògnita.

### **Mètode de reducció.**

Es pretén transformar el sistema en un altre que tingui, en totes dues equacions, coeficients iguals, però oposats, en la mateixa incògnita, per tal que al sumar-les s'obtingui una equació amb una única incògnita.

#### **Exemples:**

- 1) Anem a resoldre el sistema  $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$  pel mètode de reducció.

En aquest cas, tenim que: sumant ambdues equacions ens queda que  $5x = 5$ , i per tant  $x = 1$ .

El sistema anterior el podem substituir pel sistema equivalent  $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$ , que és molt fàcil de resoldre, ja que només cal substituir en la primera equació el valor de  $x$  per  $x = 1$ .

D'aquí que:  $3 \cdot 1 + y = 2$ , d'on  $y = -1$ . La solució és:  $x = 1$  i  $y = -1$ .

- 2) Anem a resoldre el sistema  $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$  pel mètode de reducció.

Multiplicant la primera equació per 2 i la segona per 3, obtenim el sistema  $\begin{cases} 4x + 6y = 14 \\ 9x - 6y = 12 \end{cases}$ , i sumant ambdues equacions ens queda que  $13x = 26$ , d'on  $x = 2$ .

El nou sistema equivalent serà:  $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x = 2 \end{cases}$ . Si substituïm en la primera equació el valor de  $x$  per  $x = 2$ , tenim que  $2 \cdot 2 + 3y = 7$ , i per tant,  $y = 1$ . La solució és:  $x = 2$  i  $y = 1$ .

### **ACTIVITAT 3.3.**

Resoleu pel mètode de reducció els següents sistemes:

- a)  $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$                       b)  $\begin{cases} 5x - 2y = -1 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$
- c)  $\begin{cases} x - 5y = 0 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$                       d)  $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$

### **Mètode d'igualació.**

Es pretén aïllar en les dues equacions la mateixa incògnita, per tal de poder igualar les seves expressions..

**Exemples:**

- 1) Anem a resoldre el sistema  $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$  pel mètode d'igualació.

En aquest cas, aïllem la  $y$  en totes dues equacions, i tenim:  $\begin{cases} y = 2 - 3x \\ y = -3 + 2x \end{cases}$

Si igualem les dues expressions, tenim que:  $2 - 3x = -3 + 2x$ , d'on  $x = 1$ . El sistema equivalent serà:  $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$ . Substituir en la primera equació el valor de  $x$  per  $x = 1$ , tenim que:  $3 \cdot 1 + y = 2$ , d'on  $y = -1$ . La solució és:  $x = 1$  i  $y = -1$ .

- 2) Anem a resoldre el sistema  $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$  pel mètode d'igualació.

Aïllant la  $x$  en totes dues equacions, tenim:  $\begin{cases} x = \frac{7 - 3y}{2} \\ x = \frac{4 + 2y}{3} \end{cases}$ , i igualant les dues expressions,

tenim:  $\frac{7 - 3y}{2} = \frac{4 + 2y}{3}$ , d'on es pot deduir que  $y = 1$ .

El nou sistema equivalent serà:  $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ y = 1 \end{cases}$ . Si substituïm en la primera equació el valor de  $y$  per  $y = 1$ , tenim que  $2x + 3 \cdot 1 = 7$ , i per tant,  $x = 2$ . La solució és:  $x = 2$  i  $y = 1$ .

**ACTIVITAT 3.4.**

Resoleu pel mètode d'igualació els sistemes següents:

a)  $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 5x + y = -6 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x + 7y = 1 \\ 3x - 2y = 14 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x - y = 0 \\ -2x + y = -2 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ -3x + y = 0 \end{cases}$

**Mètode de substitució.**

Es tracta d'aïllar una incògnita d'una de les dues equacions per a substituir la seva expressió en l'altra equació.

- 1) Anem a resoldre el sistema  $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$  pel mètode De substitució.

En aquest cas, aïllem la  $y$  en la primera equació i tenim:  $\begin{cases} y = 2 - 3x \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

Si substituïm l'expressió de  $y$  en la segona equació, tenim que:  $2x - (2 - 3x) = 3$ , d'on  $5x = 5$ , i  $x = 1$ . El sistema equivalent serà:  $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$ . Substituir en la primera equació el valor de  $x$  per  $x = 1$ , tenim que:  $3 \cdot 1 + y = 2$ , d'on  $y = -1$ . La solució és:  $x = 1$  i  $y = -1$ .

- 2) Anem a resoldre el sistema  $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$  pel mètode de substitució.

Aïllant la  $x$  en la primera equació i ens queda  $\begin{cases} x = \frac{7-3y}{2} \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ . Substituint l'expressió de  $x$  en la

segona equació, tenim:  $3 \cdot \frac{7-3y}{2} - 2y = 4$ , d'on es pot deduir que  $21 - 9y - 4y = 8$ , d'on  $y = 1$ .

El nou sistema equivalent serà:  $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ y = 1 \end{cases}$ . Si substituïm en la primera equació el valor de  $y$  per  $y = 1$ , tenim que  $2x + 3 \cdot 1 = 7$ , i per tant,  $x = 2$ . La solució és:  $x = 2$  i  $y = 1$ .

### **ACTIVITAT 3.5.**

Resoleu pel mètode d'igualació els sistemes següents:

a)  $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 5x - 4y = 7 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x + 5y = 11 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$

### **3.2. Sistemes d'equacions no lineals.**

Tots els sistemes d'equacions que no tenen la forma indicada anteriorment reben el nom de sistemes d'equacions no lineals.

#### **Exemples:**

- 1) El sistema  $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 265 \end{cases}$  és un sistema no lineal de 2n grau. El mètode que es fa servir per resoldre aquest tipus de sistema és el de substitució. Anem a resoldre'l.

Aillem una incògnita de la primera equació:  $x = 1 + y$ . I substituïm l'expressió d'aquesta incògnita en la segona equació:  $(1 + y)^2 + y^2 = 265$ .

Reduïm els termes semblants:  $(1 + 2y + y^2) + y^2 = 265 \rightarrow 2y^2 + 2y - 264 = 0$ . I simplificant, tenim:  $y^2 + y - 132 = 0$ .

Resolem l'equació de segon grau que hem obtingut:

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+528}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{-1 \pm 23}{2} \rightarrow y_1 = 11 \text{ i } y_2 = -12.$$

D'aquí que:

- Si  $y = 11$ ,  $x = 1 + 11 = 12$ .
- Si  $y = -12$ ,  $x = 1 + (-12) = -11$

Aquest sistema té dues solucions i són:  $x = 12$  i  $y = 11$ , o bé,  $x = -11$  i  $y = -12$ .

2) Anem a resoldre el sistema  $\begin{cases} x \cdot y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ . Aïllem de la segona equació la variable  $y$ , i tenim:

$y = 5 - 2x$ , i substituïm aquesta expressió en la primera equació, ens queda  $x \cdot (5 - 2x) = 3$ , equació que ens porta a que  $2x^2 - 5x + 3 = 0$ . Resolent aquesta equació de segon grau tenim que  $x_1 = 3/2$  i  $x_2 = 1$ . I substituint en la segona equació surt:

○ Si  $x = 3/2$ ,  $y = 5 - 2 \cdot 3/2 = 2$

○ Si  $x = 1$ ,  $y = 5 - 2 \cdot 1 = 3$ .

El sistema té dues solucions i són:  $x = 3/2$  i  $y = 2$ , o bé,  $x = 1$  i  $y = 3$ .

### **ACTIVITAT 3.6.**

Resoleu els següents sistemes d'equacions no lineals:

a)  $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 40 \\ x^2 + y^2 = 58 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ 2x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} x \cdot y = 1000 \\ 2x + y = 120 \end{cases}$

## **3.4. Problemes que es resolen mitjançant sistemes d'equacions.**

Els sistemes d'equacions poden ser de gran utilitat al plantejar la resolució de molts problemes en que apareixen dos incògnites. Tal com succeïa en els problemes que es resolien mitjançant equacions de 1r o 2n grau i amb dues incògnites, el primer que hem de fer es transformar el llenguatge escrit que ens proporciona l'enunciat d'un problema en llenguatge algèbric. A diferència de les equacions, en els sistemes hem de determinar els valors de les dues incògnites.

### **ACTIVITAT 3.7.**

En Jordi ven dos tipus de cafè, cafè natural a 4,50 €/Kg i cafè torrefacte a 3,20 €/Kg. Quants quilograms de cafè de cada tipus ha d'agafar per aconseguir una barreja amb un preu de venda que resulti a 4 €/Kg, si aquesta barreja ha de contenir 3 Kg més de cafè natural que torrefacte i en Jordi no vol tenir ni pèrdues ni beneficis en aquesta operació?

### **ACTIVITAT 3.8.**

La base d'un rectangle és 3 cm més gran que l'altura i la seva àrea augmenta en 26 cm<sup>2</sup>. Quines són les dimensions d'aquest rectangle?

### **ACTIVITAT 3.9.**

Dos nombres sumen 70. Si dividim el més gran entre 10 i el més petit entre 3 i sumem els quocients el resultat és 14. Quins són aquests nombres?

### **ACTIVITAT 3.10.**

El perímetre d'un rectangle amida 42 cm i la diagonal 15 cm, calculeu les dimensions del rectangle així com la seva àrea.

**EXERCICIS:**

3.1. Resoleu els següents sistema lineals utilitzant en cada cas els tres mètodes algebriques estudiats:

a) 
$$\begin{cases} 5x - 3y = -11 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 7x - 5y = 29 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

3.2. Resoleu els següents sistemes no lineals:

a) 
$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 10 \\ x - 3y^2 = 8 \end{cases}$$

3.3. Resoleu, pel mètode que més adient, els sistemes:

a) 
$$\begin{cases} 4y - 3 \cdot (x - 2) = -10 \\ 3 \cdot (x - y) - 8 = 2x - y \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} \frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{6} \\ 2 \cdot (x+2) = y-5 \end{cases}$$

3.4. Un pare té actualment 5 vegades l'edat de la seva filla. D'aquí a tres anys, la seva edat només serà 4 vegades superior. Quina edat té cadascun?

3.5. La diferència entre dos nombres és 9. Si dividim l'un per l'altre obtenim 2 de quocient i 3 de residu. Quins són aquests nombres?

3.6. La Mercè té 20 monedes a la seva guardiola, unes de 50 cèntims d'euro i altres de 20 cèntims. Quantes monedes té de cada tipus si sumen un total de 5,50 €?

3.7. Per tancar una finca rectangular s'utilitza 1300 m de tanca.. Calculeu les dimensions de la finca sabent que si tingués 100 m menys de llargada i 100 m més d'amplada, seria quadrat.

3.8. El perímetre d'un triangle rectangle és de 60 cm i la seva àrea de 12 cm<sup>2</sup>. Trobeu la longitud dels dos catets si la hipotenusa mesura 26 cm.

**EXERCICIS COMPLEMENTARIS:**

III.1. Resoleu el sistemes lineals:

a) 
$$\begin{cases} 5x - 3y = -11 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 2y - 3 \cdot (x - 1) = 14 \\ 7 \cdot (x + 1) - 2 = 5x + y \end{cases}$$

III.2. Resoleu el sistemes no lineals:

a) 
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x \cdot (y + 1) = -4 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

III.3. L'edat d'una noia és igual a l'arrel quadrada de l'edat de la seva mare. D'aquí a 7 anys l'edat de la mare serà quatre vegades la de la noia. Trobeu les edats de totes dues.

III.4. Trobeu dos nombres naturals la suma dels quals és 14 i la suma dels seus quadrats 100.

III.5. El perímetre d'un triangle isòsceles fa 36 cm i l'alçada corresponent al costat desigual 12 cm. Quina és la longitud de cada un dels costats del triangle?