

Polinomis i fraccions algèbriques

Crèdit variable d'ampliació

Tema 1: Polinomis. Operacions.

Donem per fet que et són familiars les equacions de 1r i 2n grau i les funcions que tenen per gràfic una recta o una paràbola, també anomenades funcions polinòmiques de 1r i 2n grau. Per tant, t'hauràs adonat de la gran utilitat d'introduir lletres per substituir els nombres, i per tant, pensem que l'estudi que farem en aquest crèdit et pot servir d'una banda, per reforçar conceptes que ja coneixes, i d'altra, per assolir una certa destresa en el càlcul on apareguin polinomis.

1.1. Polinomis.

Una expressió com $p(x) = 7x^2 + 3x - 5$, que només conté potències de x amb exponents naturals, s'anomena **polinomi d'una indeterminada x amb coeficients reals**. Com la potència més gran de x és x^2 , diem que el polinomi és de grau 2.

Cada terme (o sumand) està format pel producte d'un nombre real (**coeficient**) i una potència de x (**part literal**) i s'anomena **monomi**. El grau d'un monomi és l'exponent de la part literal (Exemple: 5 és de grau 0 i $3x^7$ de grau 7). Un **binomis** és un polinomi amb dos sumands i un **trinomis** amb tres. En general, els polinomis s'escriuen ordenats segons els graus dels monomis, és a dir, de més gran a més petit, o bé, de més petit a més gran.

Activitat 1.1.

a) Són polinomis les expressions següents?

$$7x^2 - \frac{1}{x}; \quad 2x^7 - 5x^2 + x - 1; \quad 3\sqrt{x} + 3x + 1; \quad 3x^5 - 2x$$

En cas afirmatiu, quin grau tenen?

b) Indica quin d'ells és un binomi. Quin és el seu grau? Quin és el coeficient del monomi de grau màxim?

Al substituir x per un nombre a s'obté el **valor numèric del polinomi** per a $x = a$. Si el valor numèric és 0 quan x pren el valor a , diem que **a és un zero o una arrel del polinomi**.

Activitat 1.2.

a) Calcula el valor numèric dels següents polinomis per a $x = 0$, $x = 2$ i $x = -1$.

$$p(x) = 3x^3 + 2x^2 + 3x - 1.$$

$$q(x) = x^2 + 5x - 14.$$

$$r(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2.$$

$$s(x) = 3x^5 - 2x^3 + x.$$

b) Indica si algun d'aquests valors és una arrel d'algun dels polinomis anteriors.

Polinomis i fraccions algèbriques

Crèdit variable d'ampliació

Activitat 1.3.

- a) Ordena els següents polinomis i troba el valor numèric per a $x = -1/3$ i $x = \sqrt{2}$.
 $p(x) = 4x + x^3 + 3 - x^2$. $q(x) = x^2 + 2x^4 - 1$.
- b) Les funcions afins tenen per gràfic una recta i la seva expressió és un polinomi. Dóna l'expressió general d'una funció afí, indica el grau i el significat que tenen els coeficients de cada monomi. Quin és el zero o arrel d'aquest polinomi?
- c) Les funcions que tenen per gràfic una paràbola reben el nom de funcions quadràtiques. Aquestes funcions també tenen com a expressió un polinomi. Dóna l'expressió general d'una funció quadràtica, indica el grau i dóna el significat dels coeficients de cada monomi. Quins són els zeros o arrels d'aquest polinomi?

1.2. Operacions: la suma i el producte de polinomis.

1.2.1. La suma de polinomis.

La suma de polinomis es redueix a una suma o a una resta de nombres. N'hi ha prou en agrupar els termes semblants (termes amb la mateixa part literal) i sumar o restar els seus coeficients.

Per exemple: Si volem sumar els polinomis $p(x) = 5x^2 + 3x - 7$ i $q(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$, farem: $p(x) + q(x) = (5x^2 + 3x - 7) + (x^3 - 2x^2 + 5x + 1) = x^3 + (5x^2 - 2x^2) + (3x + 5x) + (-7 + 1) = x^3 + 3x^2 + 8x - 6$.

Activitat 1.4.

Donats els polinomis:

$$p(x) = 3x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + 1, \quad q(x) = \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + x + 3 \quad \text{i} \quad r(x) = x^2 + 5x - 2,$$

es demana:

- a) el polinomi $p(x) + q(x)$.
b) els polinomis $-q(x)$ i $-r(x)$.
c) els polinomis $p(x) + q(x) + r(x)$ i $p(x) - q(x) - r(x)$.

1.2.2. El producte de polinomis.

a) Per multiplicar dos monomis n'hi ha prou en multiplicar els coeficients i les parts literals, utilitzant en aquest darrer cas, la propietat del producte de potències d'igual

Polinomis i fraccions algèbriques

Crèdit variable d'ampliació

base.

Per exemple: Si volem multiplicar els monomis $p(x) = 5x^3$ i $q(x) = -2x^2$, farem:
 $p(x) \cdot q(x) = (5x^3) \cdot (-2x^2) = -10x^5$.

b) Si tenim en compte l'apartat anterior, el producte de polinomis és pràcticament igual, només cal tenir en compte la propietat distributiva del producte respecte de la suma.

Per exemple: Si volem multiplicar els polinomis $p(x) = 5x^2 + 3x - 7$ i $q(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$, farem:
 $p(x) \cdot q(x) = (5x^2 + 3x - 7) \cdot (x^3 - 2x^2 + 5x + 1) =$
 $= (5x^5 - 10x^4 + 25x^3 + 5x^2) + (3x^4 - 6x^3 + 15x^2 + 3x) + (-7x^3 + 14x^2 - 35x - 7) =$
 $= 5x^5 + (-10x^4 + 3x^4) + (25x^3 - 6x^3 - 7x^3) + (5x^2 + 15x^2 + 14x^2) + (3x - 35x) - 7 =$
 $= 5x^5 - 7x^4 + 12x^3 + 34x^2 - 32x - 7$.

Activitat 1.5.

Donats els polinomis:

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2, \quad q(x) = 2x^3 - x^2 + 5x + 3 \quad \text{i} \quad r(x) = x^2 - 1,$$

es demana:

- els polinomis $p(x) \cdot q(x)$ i $q(x) + r(x)$.
- el polinomi $p(x) \cdot [q(x) + r(x)]$.

Dues maneres pràctiques de calcular el producte de polinomis són:

.	1	-2	5	1
5	5	-10	25	5
3	3	-6	15	3
-7	-7	14	-35	-7

$5x^5$

$-7x^4$

$+12x^3$

$+34x^2$

$-32x$

-7

i també,

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 2x^2 + 5x + 1 \\
 \underline{5x^2 + 3x - 7} \\
 -7x^3 + 14x^2 - 35x - 7 \\
 3x^4 - 6x^3 + 15x^2 + 3x \\
 \underline{5x^5 - 10x^4 + 25x^3 + 5x^2} \\
 5x^5 - 7x^4 + 12x^3 + 34x^2 - 32x - 7
 \end{array}$$

Polinomis i fraccions algèbriques

Crèdit variable d'ampliació

Activitat 1.6.

Calcula:

- a) $(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 3) \cdot (x^2 - 2x - 1)$.
- b) $(3x^2 + 5x - 2) \cdot (x^3 - 5x + 7)$.
- c) $(x^4 - x^2 + 4) \cdot (x^3 + x^2 - 2x + 1)$.
- d) $(5x^3 - 2x^2 + 3x - 1) \cdot (x + 2)$

1.2.3. El producte d'un polinomi per un nombre real.

Per multiplicar un polinomi $p(x)$ per un nombre real k , n'hi ha prou en multiplicar tots els coeficients d'aquest polinomi per k .

Per exemple: Si el polinomi és $p(x) = 3x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 7$ i el volem multiplicar per -3 , escriurem: $-3 \cdot p(x) = -3 \cdot (3x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 7) = -9x^4 - 3x^3 + 15x^2 - 3x + 21$.

Activitat 1.7.

Donats els polinomis $p(x) = 5x^2 + 3x - 2$ i $q(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$, es demana:

- a) $3 \cdot p(x) =$
- b) $-2 \cdot q(x) =$
- c) $3 \cdot p(x) - 2 \cdot q(x) =$
- d) $p(x) \cdot [3 \cdot p(x) - 2 \cdot q(x)] =$

Activitat 1.8.

Donats els polinomis $p(x) = 2x^5 + 3x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ i $q(x) = -3x^2 - x + 3$, es demana sense fer cap càlcul:

- a) Quin grau tenen els polinomis $p(x)+q(x)$, $p(x) \cdot q(x)$ i $3 \cdot p(x)$?
- b) Quin és el coeficient de major grau i el terme independent dels polinomis $p(x)+q(x)$, $p(x) \cdot q(x)$ i $3 \cdot p(x)$?
- c) Calcula l'expressió d'aquests polinomis i comprova que les respostes que has donat anteriorment són correctes.

ACTIVITATS COMPLEMENTARIES:

Activitat 1.9.

Donats els polinomis $p(x) = 5x^5 - 2x^3 + x^2 + 7x - 3$ i $q(x) = 2x^2 - 3x + 5$, es demana:

- a) Quins són els valors numèrics de $p(x)$ i de $q(x)$ per a $x = -2$.

Polinomis i fraccions algèbriques

Crèdit variable d'ampliació

b) És $x = 1$ una arrel del polinomi $p(x)$? I de $q(x)$?

Activitat 1.10.

Donats els polinomis $p(x) = 5x^5 - 2x^3 + x^2 + 7x - 3$ i $q(x) = 2x^2 - 3x + 5$, es demana:

- a) $p(x) + q(x)$.
- b) $2 \cdot p(x) - 5 \cdot q(x)$.
- c) $p(x) \cdot q(x)$.
- d) $[p(x)]^2 + 2 \cdot q(x)$.

Activitat 1.11.

- a) Donats els polinomis $p(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4$ i $q(x) = x + 1$, es demana l'expressió del polinomi $r(x)$ tal que $q(x) \cdot r(x) = p(x)$. Quin és el grau del polinomi $r(x)$?
- b) Troba el polinomi $s(x)$ tal que $s(x) \cdot (2x^2 - 3x + 2) = 6x^3 - 7x^2 + 3x + 2$.

Activitat 1.12.

Digues quines de les següents identitats són certes, i en aquelles que siguin falses indica on és l'error.

- a) $2x + 3x^2 = 5x^3$.
- b) $1 - 2x - 3x^2 = -x - 3x^2$.
- c) $-x^2 + 2 + 5x - x^2 = -2x^2 + 5x + 2$.
- c) $(3x^2 + 2)^2 = 9x^4 + 4$.
- d) $3x^3 + 5x^2 = (3x^2 + 5x) \cdot x$.
- e) $(x^2 - x) \cdot (x^2 + x) = x^4 - x^2$.

Activitat 1.13.

Utilitza les fórmules dels productes notables per tal de trobar les expressions de:

- a) $(3x^2 + 2)^2$.
- b) $(2x^3 - 1)^2$.
- c) $(4 + 3x^2)(4 - 3x^2)$.
- e) $(-x^2 + x)^2$.
- f) $(x^3 - 2x)(x^3 + 2x)$.