

Tema 2: Divisibilitat. Descomposició factorial.

2.1. Múltiples i divisors.

Cal recordar que: "Si al dividir dos nombres enters a i b trobem un altre nombre enter k tal que $a = k \cdot b$, aleshores diem que **a és un múltiple de b** , o bé, que **b és un divisor d' a** ". Així per exemple, sabem que 14 és un múltiple de 2 perquè $14 = 7 \cdot 2$, i que 2 és per tant un divisor de 14.

Amb polinomis funciona de forma semblant, així doncs, tenim: "Si $a(x)$ i $b(x)$ són dos polinomis, direm que **$a(x)$ és un múltiple de $b(x)$** si existeix un altre polinomi $q(x)$ tal que $a(x) = q(x) \cdot b(x)$. En tal cas, també diem que **$b(x)$ és un divisor de $a(x)$** ".

Per exemple:

- 1) Sabem que $x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$, d'aquí deduïm que $x^2 - 1$ és un múltiple de $x + 1$ i de $x - 1$, i també, que $x + 1$ i $x - 1$ són divisors de $x^2 - 1$.
- 2) És fàcil comprovar que $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$. D'aquí deduïm que $x^2 - 4x + 4$ és un múltiple de $x - 2$ i que $x - 2$ és un divisor de $x^2 - 4x + 4$.
- 3) Comprova que $(x^2 + 2) \cdot (x - 3) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6$. D'aquesta igualtat es dedueix que $x^3 - 3x^2 + 2x - 6$ és un múltiple de $x - 3$ i també de $x^2 + 2$ i, per tant, que $x - 3$ i $x^2 + 2$ són dos divisors de $x^3 - 3x^2 + 2x - 6$.

Activitat 2.1.

- a) Si $a(x) = x^2 + 5x + 6$ i $b(x) = x + 3$. Podem assegurar que $a(x)$ és un múltiple de $b(x)$?
 - b) $a(x) = x - 2$ i $b(x) = x^2 - x + 6$. Podem assegurar que $a(x)$ és un divisor de $b(x)$?
- Raona les teves respostes.

2.2. Divisió de polinomis. Regla de Ruffini.

2.2.1. Divisió de polinomis.

Quan dividim 9 per 2, obtenim com a quocient 4 i com a residu 1. Això ens porta a escriure que $9 = 4 \cdot 2 + 1$. Aquesta regla tan elemental, també és aplicable a polinomis, així doncs, tenim que: "Si volem dividir un polinomi $a(x)$ per un altre $b(x)$, existeixen sempre dos polinomis $q(x)$ (quocient) i $r(x)$ (residu) tal que $a(x) = q(x) \cdot b(x) + r(x)$, on el grau de $r(x)$ sempre és més petit que el grau de $b(x)$."

Polinomis i fraccions algèbriques

Crèdit variable d'ampliació

A continuació donarem un mètode per determinar el quocient i el residu de la divisió de dos polinomis. Si volem dividir el polinomi $a(x)$ per $b(x)$, el procediment a seguir, seria:

- 1) Trobar un monomi que multiplicat pel terme de grau màxim de $b(x)$ ens doni el terme de major grau de $a(x)$.
- 2) Amb el polinomi $k(x)$ que s'obté de restar a $a(x)$ el producte del monomi i $b(x)$, es tornarà a fer el mateix, sempre que el grau de $k(x)$ sigui més gran o iguala $b(x)$, en cas contrari, hem acabat la divisió.

Per exemple: Per dividir el polinomi $a(x) = 5x^6 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 - 1$ per $b(x) = x^3 - x^2 + x + 1$, farem:

$$\begin{array}{r} 5x^6 + 3x^4 + x^3 + 3x^2 - 1 \\ - 5x^6 + 5x^5 - 5x^4 - 5x^3 \\ \hline 5x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1 \\ - 5x^5 + 5x^4 - 5x^3 - 5x^2 \\ \hline 3x^4 - 9x^3 - 2x^2 - 1 \\ - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 3x \\ \hline - 6x^3 - 5x^2 - 3x - 1 \\ \quad 6x^3 - 6x^2 + 6x + 6 \\ \hline \quad \quad -11x^2 + 3x + 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} | \quad x^3 - x^2 + x + 1 \\ \hline 5x^3 + 5x^2 + 3x - 6 \end{array}$$

El quocient d'aquesta divisió és $q(x) = 5x^3 + 5x^2 + 3x - 6$ i el residu $r(x) = -11x^2 + 3x + 5$. Podem comprovar fàcilment que: $a(x) = q(x) \cdot b(x) + r(x)$.

Activitat 2.2.

Calcula el quocient i el residu de les divisions:

- a) $(x^3 - x^2 + x + 3) : (x^2 - x - 3)$.
- b) $(2x^2 + 3x - 7) : (x^3 - 2x + 1)$.
- a) $(x^4 - x^3 + 4x - 5) : (2x + 1)$.
- b) $(3x^3 - 2x^2 + 3x - 1) : (x - 2)$

2.2.2. Regla de Ruffini.

En el cas particular que el divisor sigui del tipus $(x - a)$, l'algoritme de la divisió es pot fer de forma més simple si utilitzem la regla de Ruffini.

Imagina't que vols calcular el quocient i el residu de la divisió: $(5x^3 - 4x^2 + 5x - 1) : (x - 2)$. Si fem servir l'algoritme anterior, tenim:

Polinomis i fraccions algèbriques

Crèdit variable d'ampliació

$$\begin{array}{r} 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1 \\ -5x^3 + 10x^2 \\ \hline 6x^2 + 5x - 1 \\ -6x^2 + 12x \\ \hline 17x - 1 \\ -17x + 34 \\ \hline 33 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \quad x - 2 \\ 5x^2 + 6x + 17 \end{array}$$

Observa com els coeficients del divisor i el residu es poden obtenir de manera més simple fent:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 5 & -4 & 5 & -1 \\ 2 & & 10 & 12 & 34 \\ \hline & 5 & 6 & 17 & 33 \end{array}$$

*Els nombres de la primera fila són els coeficients del dividend, els de la tercera la suma de les dues anteriors.

*Cada nombre de la segona fila és el producte del terme anterior de la tercera fila per 2 (recorda que el divisor és $x - 2$) excepte el primer, que és zero.

Observació: Recorda de posar un zero per a cada terme de coeficient nul del polinomi dividend.

Activitat 2.3.

Troba el quocient i el residu de les següents divisions fent ús de la regla de Ruffini:

a) $(x^3 - 5x^2 + 3x + 1) : (x - 3)$.

b) $(5x^2 + 2x - 7) : (x + 1)$.

c) $(x^4 - 3x^3 + 4x - 5) : (x + \frac{1}{2})$.

d) $(3x^3 - 7x^2 + 5x + 3) : (x - 2)$

La regla de Ruffini només la podem aplicar si el divisor és del tipus $(x - a)$. Ara bé, existeix alguna situació en la que després de fer una senzilla transformació podem aplicar aquesta regla. Així per exemple, podem calcular el quocient i el residu de la divisió $(6x^3 - 4x^2 + x - 2) : (2x - 1)$ aplicant la regla de Ruffini, dividint prèviament el dividend i el divisor per 2.

Polinomis i fraccions algèbriques

Crèdit variable d'ampliació

Activitat 2.4

Calculeu el quocient i el residu de les següents divisions utilitzant la regla de Ruffini:

- a) $(2x^3 - 5x^2 + 3x + 1) : (2x - 3)$.
- b) $(9x^2 + 2x - 1) : (3x + 1)$.
- c) $(5x^4 - 2x^3 + x - 5) : (5x - 1)$.
- d) $(x^3 - 1) : (\frac{x}{2} - 1)$.

TEOREMA DEL RESIDU:

"El residu de la divisió d'un polinomi $p(x)$ per $(x - a)$ coincideix amb el valor numèric de $p(x)$ per a $x = a$, és a dir, $p(x) = q(x) \cdot (x - a) + p(a)$ ".

La seva demostració és molt senzilla, ja que al dividir $p(x)$ per $(x - a)$ trobarem els polinomis $q(x)$ i r , quocient i residu de la divisió, de tal forma que:

$$p(x) = q(x) \cdot (x - a) + r.$$

Si calculem el valor numèric de $p(x)$ per a $x = a$, obtenim:

$$p(a) = q(a) \cdot (a - a) + r, \text{ d'on es dedueix que } p(a) = r.$$

Recorda que si el residu és 0, el polinomi $p(x)$ és divisible per $(x - a)$.

Activitat 2.5.

Utilitza la regla de Ruffini per calcular el valor numèric dels polinomis següents per a $x = -1$.

- a) $p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x + 3$.
- b) $p(x) = -3x^2 + 2x + 5$.
- c) $p(x) = -x^4 - 3x^3 + 2x - 4$.
- d) $p(x) = x^3 - 7x + 1$.

Activitat 2.6.

- a) Determineu el valor de m per tal que el polinomi $p(x) = x^3 + 2x^2 + mx - 3$ sigui divisible per $x - 1$.
- b) Determineu el valor de m per tal que al dividir el polinomi $p(x) = -4x^4 + 2x^2 + mx + 3$ per $x + 2$ el residu sigui -5 .

Polinomis i fraccions algèbriques

Crèdit variable d'ampliació

2.3. Descomposició factorial d'un polinomi.

Un polinomi $p(x)$ de grau més gran o igual a 1 es diu que és **irreductible** si no es pot descompondre com a producte de dos polinomis.

Per exemple:

- 1) El polinomi $p(x) = x^2 - 3x + 2$ no és irreductible, ja que es pot escriure com a producte de $x-2$ i $x-1$.
- 2) Tots els polinomis de grau 1 són irreductibles.
- 3) El polinomi $p(x) = x^2 + 1$ és irreductible, ja que no es possible trobar dos polinomis de grau 1 tal que el seu producte sigui $p(x)$.

TEOREMA DE FACTORITZACIÓ:

"Tot polinomi de grau més gran o igual a 1 es pot descompondre en producte de polinomis irreductibles".

Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ són zeros o arrels de $p(x)$, la descomposició factorial del polinomi és:

$$p(x) = q(x) \cdot (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot (x - a_3) \cdot \dots \cdot (x - a_n)$$

i si el grau de $q(x)$ és n , aleshores $q(x)$ és una constant a , i la descomposició seria:

$$p(x) = a \cdot (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot (x - a_3) \cdot \dots \cdot (x - a_n)$$

Per exemple:

- 1) Per descompondre el polinomi $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 23x - 10$, hem de trobar totes les arrels del polinomi i farem ús de la regla de Ruffini. Les arrels enteres es troben sempre entre tots els divisors del terme independent, és a dir: -10. Els divisors de -10 són: 1, -1, 2, -2, 5, -5, 10 i -10. Si anem provant entre aquests nombres, ens surten com a arrels -2 i 5, ja que:

	2	-5	-23	-10
-2		-4	18	10
	2	-9	-5	0
5		10	5	
	2	1	0	

d'on és té: $p(x) = (x + 2) \cdot (x - 5) \cdot (2x + 1)$, o bé, $2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 5) \cdot (x + \frac{1}{2})$.

- 2) La descomposició factorial de $p(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$ és: $p(x) = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 5)$, ja que 1, -2 i 5 són arrels del polinomi i el grau és 3.

Polinomis i fraccions algèbriques

Crèdit variable d'ampliació

Activitat 2.7.

Dóna la descomposició factorial dels següents polinomis:

- a) $p(x) = -4x^3 + x^2 + 12x - 3$.
- b) $p(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.
- c) $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.
- d) $p(x) = 3x^3 - 16x^2 + 3x + 10$.
- e) $p(x) = 9x^4 + 27x^3 + 17x^2 - 3x - 2$.

2.4. El m.c.m. i el m.c.d. de dos polinomis.

Anomenem **mínim comú múltiple** dels polinomis $p(x)$ i $q(x)$ al polinomi de grau més petit que és múltiple simultàniament de $p(x)$ i $q(x)$, i, anomenem **màxim comú divisor** dels polinomis $p(x)$ i $q(x)$ al polinomi de grau més gran que divideix simultàniament a $p(x)$ i $q(x)$.

Si tenim feta la descomposició factorial dels dos polinomis, el m.c.m. coincideix amb el producte dels factors comuns i no comuns afectats amb el major exponent, mentre que el m.c.d. coincideix amb el producte dels factors comuns afectats amb el menor exponent.

Per exemple:

Com les descomposicions factorials de $p(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$ i de $q(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$ són respectivament:

$$p(x) = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 5) \quad \text{i} \quad q(x) = (x - 1)^2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 2),$$

tenim:

$$\text{m.c.m.}[p(x), q(x)] = (x - 1)^2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x - 5) \quad \text{i}$$

$$\text{m.c.d.}[p(x), q(x)] = (x - 1) \cdot (x + 2)$$

Activitat 2.7.

Troba el m.c.m. i el m.c.d. dels polinomis:

- a) $p(x) = x^3 - 1$ i $q(x) = x^3 - x^2 - x - 2$.
- b) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ i $q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

ACTIVITATS COMPLEMENTARIS:

Activitat 2.8.

Calcula el quocient i el residu de les divisions:

- a) $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x^2 + 3x)$.
- b) $(3x^3 - 2x^2 + 5x - 1) : (2x^2 - 3x + 1)$.

Polinomis i fraccions algèbriques

Crèdit variable d'ampliació

Activitat 2.9.

Utilitza la regla de Ruffini per calcular el quocient i el residu de les divisions:

- a) $(5x^3 - 3x^2 + 7x - 6) : (x - 3)$.
- b) $(4x^4 - x^3 + 5x^2 + 2x - 9) : (2x + 1)$.

Activitat 2.10.

Troba el valor numèric de

- a) $p(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 7x + 5$ per a $x = -3$.
- b) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ per a $x = -1/3$.

Activitat 2.11.

Determina el valor de m en els casos següents:

- a) El binomi $x - 1$ és un divisor del polinomi $x^3 + mx^2 - 3x - 2$.
- b) El residu de la divisió $(x^3 - 6x^2 + mx - 6) : (x + 2)$ és -11.

Activitat 2.12.

- a) Dóna la descomposició factorial dels polinomis:

$$p(x) = 6x^4 + 11x^3 - 13x^2 - 16x + 12 \quad \text{i} \quad q(x) = 3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$$

- b) Troba el m.c.m. i el m.c.d. dels polinomis anteriors.